たのしい サイエンス通信 (3)

2017.04.27

指数法則をたのしむ―小数の指数で―

昨年度までの「たのしい数学通信」に引き続き、今年度の「たのしいサイエンス通信」もよろしくお願いいたします。数学科教員として複数教科にもつながる内容を読者のみなさんに伝えていくようつとめていきます。

今回は、中学から高校までの数学で学習する「指数法則」の成立について、計算をまじえつつ紹介しましょう。

$\boxed{1}$ $2^x\times 2^y=2^{x+y}$

中学ではx，yが自然数の場合を学習します。たとえば、

$$2^2\times 2^3=4\times 8=32=2^5\ ,\quad 2^1\times 2^4=2\times 16=32=2^5$$

のように、

$$2^2\times 2^3=2^{2+3}\ ,\quad 2^1\times 2^4=2^{1+4}$$

として計算するときに使用します。それでは、

$2^{1.5}\times 2^{3.5}$ や $2^{2.5}\times 2^{2.5}$ のように、指数が自然数・整数でない場合はどのような計算になるのでしょうか。このことは高校の数学科や理科の数値計算で実用的です。そこで 2^1，$2^{1.1}$，$2^{1.2}$，……，2^5 について、小数第２位までの近似値を以下のようにまとめてみました。

$2^1=2$

$2^{1.1}\fallingdotseq 2.14$	$2^{2.1}\fallingdotseq 4.29$	$2^{3.1}\fallingdotseq 8.57$	$2^{4.1}\fallingdotseq 17.15$
$2^{1.2}\fallingdotseq 2.30$	$2^{2.2}\fallingdotseq 4.59$	$2^{3.2}\fallingdotseq 9.19$	$2^{4.2}\fallingdotseq 18.38$
$2^{1.3}\fallingdotseq 2.46$	$2^{2.3}\fallingdotseq 4.92$	$2^{3.3}\fallingdotseq 9.85$	$2^{4.3}\fallingdotseq 19.70$
$2^{1.4}\fallingdotseq 2.64$	$2^{2.4}\fallingdotseq 5.28$	$2^{3.4}\fallingdotseq 10.56$	$2^{4.4}\fallingdotseq 21.11$
$2^{1.5}\fallingdotseq 2.83$	$2^{2.5}\fallingdotseq 5.66$	$2^{3.5}\fallingdotseq 11.31$	$2^{4.5}\fallingdotseq 22.63$
$2^{1.6}\fallingdotseq 3.03$	$2^{2.6}\fallingdotseq 6.06$	$2^{3.6}\fallingdotseq 12.13$	$2^{4.6}\fallingdotseq 24.25$
$2^{1.7}\fallingdotseq 3.25$	$2^{2.7}\fallingdotseq 6.50$	$2^{3.7}\fallingdotseq 13.00$	$2^{4.7}\fallingdotseq 25.99$
$2^{1.8}\fallingdotseq 3.48$	$2^{2.8}\fallingdotseq 6.96$	$2^{3.8}\fallingdotseq 13.93$	$2^{4.8}\fallingdotseq 27.86$
$2^{1.9}\fallingdotseq 3.73$	$2^{2.9}\fallingdotseq 7.46$	$2^{3.9}\fallingdotseq 14.93$	$2^{4.9}\fallingdotseq 29.86$
$2^2=4$	$2^3=8$	$2^4=16$	$2^5=32$

実際に、

$$2^{1.5}\times 2^{3.5}\fallingdotseq 2.83\times 11.31\fallingdotseq 32.01\ ,$$
$$2^{2.5}\times 2^{2.5}\fallingdotseq 5.66\times 5.66\fallingdotseq 32.04$$

より、 $2^5=32$ にほぼ近い値を求めることができました。

$\boxed{2}$ $(2^x)^y=2^{xy}$

$(2^2)^2=4^2=16$ すなわち $16=2^4$ ですね。

では、

$(2^{1.5})^2$ ， $(2^{2.5})^2$ を計算しましょう。

$$(2^{1.5})^2\fallingdotseq 2.83^2=8.01\ ,$$
$$(2^{2.5})^2\fallingdotseq 5.66^2=32.04$$

より、 $(2^{1.5})^2=2^3=8$ ， $(2^{2.5})^2=2^5=32$ の成立を見ることができます。

$\boxed{3}$ $\dfrac{2^x}{2^y}=2^{x-y}$

$$\frac{2^5}{2^3}=\frac{32}{8}=4=2^2\ ,$$
$$\frac{2^4}{2^2}=\frac{16}{4}=4=2^2\ ,$$
$$\frac{2^3}{2^1}=\frac{8}{2}=4=2^2$$

ですね。これらの指数が自然数・整数である場合をふまえて、

$$\frac{2^{4.5}}{2^{2.5}}\fallingdotseq\frac{22.63}{5.66}\fallingdotseq 4.00\ ,$$
$$\frac{2^{3.5}}{2^{1.5}}\fallingdotseq\frac{11.31}{2.83}\fallingdotseq 4.00$$

より、 $2^2=4$ に非常に近い値であることをたしかめられました。

以上の計算を通して指数が整数でない小数・分数（有理数といいます。）の範囲であっても、「指数法則」の成立をしらべることができます。 （杉）