

たのしい

2017.06.22

サイエンス通信 (8)

部分集合を知ろう ー二択問題でー

二期制である堺高校では、前期第二中間考査まであと2週間です。堺高校のみなさんも、中学生のみなさんも定期考査にじっくり取り組みましょう。

今回は、高校数学Iあるいは数学Aで学習する部分集合の考えを深めていくことにしましょう。

はじめに、部分集合の例をひとつあげておきます。

2つの集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$ について、要素1, 2をもつ集合Bは要素1, 2, 3をもつ集合Aに含まれています。ちなみに要素とは、集合を構成しているひとつひとつのもののことです。この集合Aに含まれる集合、すなわち集合Aの部分集合は、他にも $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3\}$, $\{2\}$ などがあります。ここで、要素を1つももたない集合である空集合(くうしゅうごう) ϕ (ファイ)も部分集合として数えることにします。

それでは、ひとつひとつの要素と二択問題の1問ごとの番号を対応させて、部分集合を考察していきましょう。

第一に、1問限りの二択問題が目の前に与えられたとしましょう。この1問を問題番号1とします。問題番号1に正解した場合を $\{1\}$ 、不正解の場合を ϕ とすると、1問中1問正解を表す集合は $\{1\}$ です。したがって、 $\{1\}$ の部分集合は以下の2つあることとなります。

$$\{1\}, \phi$$

第二に、2問の二択問題に解答する場合について。問題番号1と2の、2問中2問正解を表す集合は $\{1, 2\}$ ですから、 $\{1, 2\}$ の部分集合は2問中2問正解を表

す集合、2問中1問正解を表す集合、2問中全問不正解を表す集合が当てはまります。したがって、 $\{1, 2\}$ の部分集合は以下の4つありますね。

$$\{1, 2\}, \{1\}, \{2\}, \phi$$

第三に、3問の二択問題に解答する場合。問題番号1, 2, 3の3問中3問正解を表す集合 $\{1, 2, 3\}$ の部分集合は3問中3問正解を表す集合、3問中2問正解を表す集合、3問中1問正解を表す集合、3問中全問不正解を表す集合が当てはまります。したがって、 $\{1, 2, 3\}$ の部分集合をすべて数えあげると、以下の8つあることがわかります。

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \\ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \phi$$

さらに、4問の二択問題に解答する場合。番号1, 2, 3, 4の4問中4問正解を表す集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ の部分集合は、以下の16つありますね。

$$\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \\ \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \\ \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \\ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \phi$$

以上より、二択問題が1問増えるごとに部分集合の総数が2つ、4つ、8つ、16つ、と2倍に増加していることを確かめることができます。

このことをふまえると、5問の二択問題について5問中5問正解を表す集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ の部分集合の総数を読者のみなさんは求めることができます。そして、 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ の部分集合を1つずつ数えあげることできますよ。

また、問題番号1から10までで作られている10問の二択問題で、10問中全問正解を表す集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ の部分集合の総数を推測してみましょう。

部分集合の総数と、2の累乗 ($2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n, \dots$) とのつながりを実感することができますよ。 (杉)