たのしい

サイエンス通信 (9)

2017.06.29

公式

高校の数学の中で、『公式』と呼ばれるものが多数出てきます。堺高の１年生が使っている教科書の中に、こんなのが出てきます。

展開の公式

1 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\ (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

2 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

3 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

（進）は授業でよく、これらについて、「覚えてはいけない」という言い方をします。なぜなら、これらは『式の展開』というのがどのようなことなのかを理解していれば、自然と導き出せるものだからです。あるいは、この中の３さえ知っていれば、他のものは文字の同一視や符号替えで解決できます。少し見方というか、視点を工夫すれば【覚えておこう】となるものの数をへらせます。そして(ここが大切なのですが、)公式間の関連性が感じ取れるというのが数学の持つ良さです。今回は１つの公式と別の公式とが見方の工夫で同一視できる例を紹介します。

高校の「三角比」で登場する『余弦定理(コサイン定理)』、これは教科書では次のように書かれています。

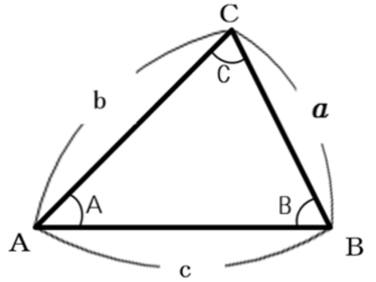
余弦定理

△ABCにおいて、次が成り立つ。

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\mathrm{A}$

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos\mathrm{B}$

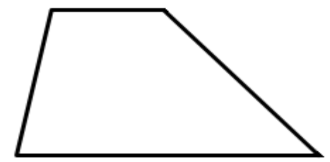
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\mathrm{C}$



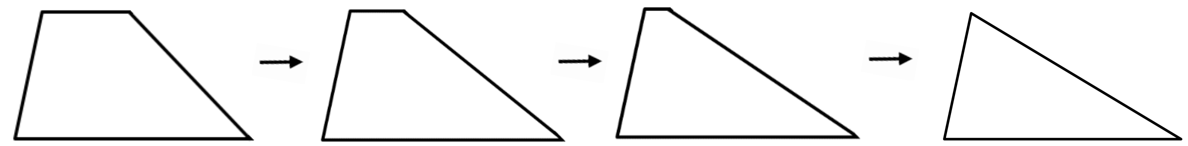
これを３つとも覚えようとする子(たとえば約 40 年前の進少年とか)がいます。１つで十分です。そしてこの公式は θ=90° のときは三平方の定理と同じ状態になります。

これと似た例が小学校で習う面積の公式の中にあります。

台形の面積＝(上底＋下底)×高さ÷2

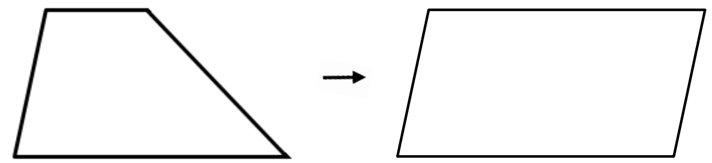


ここで、『上底』を０とすることを考えることにしましょう。すると、どのような図形になるでしょうか？



三角形ですね。三角形では『下底』という言い方はしませんが、『底辺』と『下底』が同じだというのは誰でもわかることでしょう。

さらに別の工夫として、『上底』と『下底』が等しい台形を考えると・・・



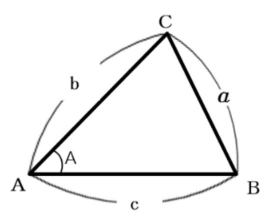
つまり、平行四辺形になります。先にあげた台形公式の上底と下底が等しいと考えると・・

このように色々な公式がつながっている例はいくつもあります。最後に高校の三角比で出てくる三角形の面積公式と小学校で習う三角形の面積公式とをつなげてみます。

三角形の面積

△ABCの面積Sは、次の式で表される。

$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$



ここで、この三角形の高さ h を求めると、h=bsinA ですね。すると、上記の公式は、

底辺→C、　高さ→bsinA

となり、小学校で習う面積公式と同じ形になりました。

（進＆秀）