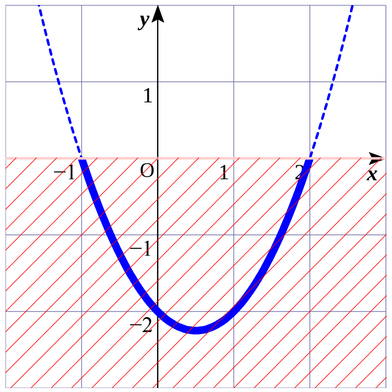
たのしい　　　　　　　　2017.9.28

サイエンス通信 (19)

虚数はあるけど見えないだけ

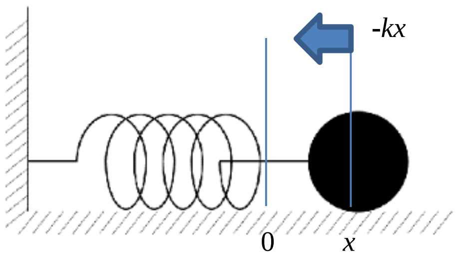
高校に行ったら数学で「**虚数**」なる数を学びます。これは「2 乗したら－1 になる数 i」を含む数です。2 乗したらマイナスにならないのが「一般の」常識です。しかしこれを考えることによって科学は大いなる発展を遂げたのです。



「次元を増やして考える」という作業は実は高校１年で履修する「２次関数」の範囲で扱う練習を実はしています。２次不等式 $x^2 - x - 2 < 0$ を解く際に，x だけの問題に対しわざわざ y 軸を作って $y = x^2 - x - 2$ と $y < 0$ に分けることによってグラフ上でわかりやすく解けるようにしています。平面に拡張することによって見えるものもあるわけです。

ばねの運動を考えてみましょう。ばねについた錘には，ばねの伸びに比例した，反対向きの力がかかります。ちょっと難しい式を使うと

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$



と表されます。このばねの動きは元の長さのところを中心に行ったり来たりするのですが，その速度は当然（？）中心付近が最も速く端に行けばゆっくりになります。これは円運動を横から見たものと同じになります。

ということでこれを「円運動を横から見たもの」と考えて計算すれば楽なのですが，この円運動の「奥行き」は私たちには見えません。ちょうど２乗すると負の数になる数みたいに。でも科学者はそれを「神の視点で」見ることにより計算を行うのです。こういう数を「虚数(imaginary number)」というのですが，私の見解としては別に想像上の数ではなく「私たちには見えないだけで実在する数」と考えています。今また脚光を浴びている超弦理論はこの世界は 10 次元や 11 次元である（うち私たちは３次元しか見ることはできていない）という体で研究されています。見えない数を考えないと科学が進展しない時代なのです。

別の例を挙げます。フィボナッチ数列というものがあります。これは

$$F(0) = 1\,, F(1) = 1, F(n+2) = F(n) + F(n+1)$$

で表される数列で，1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,⋯という感じで増えています（前の２つを足すと次の数になる）。これは自然界でもよくある数列なのですが，これを n 年後の人口が $F(n)$万人という人口爆発モデルを考えます。これを関数で表すと

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x\right\}$$

となります。√が絡んだこんなに複雑な式が x が自然数だと $F(x)$の値も自然数になるなんて不思議ですね（自然数だけの話に√を使わなければいけないというのも趣があります)。さらには x は時間ということで整数とも限りませんが，そういう数に対し後段の$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x$は x 乗する数が負の数なので，これを考える際には先ほどの虚数を導入しないといけません。またそうすることによって $F(0), F(1), F(2), \cdots$の間をつなぐ滑らかなグラフも書くことができます。（逸）