

たのしい

2018.03.23

サイエンス通信 (42)

マルコフ過程

平成 22 年基本情報技術者試験の問題

表は、ある地方の天気の変り変わりを示したものである。例えば、晴れの翌日の天気は、40%の確率で晴れ、40%の確率で曇り、20%の確率で雨であることを表している。天気の変り変わりが単純マルコフ過程であると考えたとき、雨の2日後が晴れである確率は何%か。

	翌日晴れ	翌日曇り	翌日雨
晴れ	40%	40%	20%
曇り	30%	40%	30%
雨	30%	50%	20%

未来の事象は現在の事象に依存し、過去の事象に依存しない。こういう性質をもつものをマルコフ過程といいます。

この問題、普通に解くと

$$\text{雨} \rightarrow \text{晴れ} \rightarrow \text{晴れ} \quad 0.3 \times 0.4 = 0.12$$

$$\text{雨} \rightarrow \text{曇り} \rightarrow \text{晴れ} \quad 0.5 \times 0.3 = 0.15$$

$$\text{雨} \rightarrow \text{雨} \rightarrow \text{晴れ} \quad 0.2 \times 0.3 = 0.06$$

$$\text{このようになるので合わせて} \quad 0.12 + 0.15 + 0.06 = 0.33 = 33\%$$

となります。このやり方で3日後4日後…を求めることもできますが、行列という概念を用いるとシンプルに求めることができます。

k 日目の晴れ、曇り、雨の割合をそれぞれ x_n, y_n, z_n とすると、

$$\begin{cases} x_{k+1} = 0.4x_k + 0.4y_k + 0.2z_k \\ y_{k+1} = 0.3x_k + 0.4y_k + 0.3z_k \\ z_{k+1} = 0.3x_k + 0.5y_k + 0.2z_k \end{cases}$$

これを $\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}$ と表すことにします。

3つの天気の状態をまとめた3次元ベクトルに3行3列の行列

$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$ を作用させると考えます。そうすると、 n 日後の天気は初

日の天気 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ に A を n 回作用させたので、 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ と表せます (行列の掛け

算はそれなりに特殊です)。そして、 A の固有値、固有ベクトルを求めて対角化をすることにより A^n を求めると、

$$A^n = \frac{1}{66} \begin{pmatrix} 44 \times 0.1^n + 22 & -6 \times (-0.1)^n - 22 \times 0.1^n + 28 & 6 \times (-0.1)^n - 22 \times 0.1^n + 16 \\ -22 \times 0.1^n + 22 & 27 \times (-0.1)^n + 11 \times 0.1^n + 28 & -27 \times (-0.1)^n + 11 \times 0.1^n + 16 \\ -22 \times 0.1^n + 22 & -39 \times (-0.1)^n + 11 \times 0.1^n + 28 & 39 \times (-0.1)^n + 11 \times 0.1^n + 16 \end{pmatrix}$$

となります。また、これをずっと繰り返すとこのような移り変わりをするときには晴れ : 曇り : 雨の割合が 1:1:1 になることもわかります。

難しい言葉を並べましたが、行列という概念を学ぶとこのようなことができるわけです。昔は高校でやっていたのですが、今は大学に行って線形代数という分野で学びます。対角化から A^n を求める過程は素晴らしいのでこれをやらないなんてもったいないと思います。

また、この場合は3つの天気を3次元ベクトルで表しましたが、当然4つのものは4次元ベクトルで表します。我々が住む世界は3次元だからと言っても、この例にもあるように次元という概念はもっと広く解釈されます。

本年度も「たのしい数学通信」「改め「たのしいサイエンス通信」をお読みいただきありがとうございます。 (逸)