

たのしい

2018.10.17

サイエンス通信 (18)

整数部分と小数部分

読者の皆さま、こんにちは。はじめまして、数学科の(秀)です。今回は数学 I で学習する実数の整数部分と小数部分にスポットを当ててみたいと思います。

実数とは有理数と無理数(循環しない無限小数)を合わせたもので、有理数についてはさらに整数と、有限小数または循環小数に分類できます。詳しくは数学 I の教科書を参照してください。

整数部分と小数部分については、授業で取り扱われないケースもありますので、簡単に説明しておきます。有限小数の 2.4 を例にとると、整数部分は 2 で、小数部分は 0.4 になります。最初は感覚的で構いません、小数点を境にして、左側の部分が整数部分、右側の部分が小数部分と考えてください。小数部分については 4 ではなく 0.4 です。これは、 $2.4=2+0.4$ と書き直すと納得いただけると思います。少し数式っぽく記述すると次のようになります。

$$(\text{もとの数}) = (\text{整数部分}) + (\text{小数部分}) \quad \dots \textcircled{1}$$

ただし、 $2.4=1+1.4$ 、あるいは $2.4=3+(-0.6)$ などと書き直すことにより、小数部分をそれぞれ 1.4 と -0.6 などとされてしまうと困ります。このような誤解を生まないためにも、**小数部分は 0 以上 1 未満である**という説明がついているケースもあります。

さて、先ほどの説明にもありましたが、もちろん実数は有限小数だけではありません。無理数 $\sqrt{2}$ についてはどうでしょうか。(もとの数) = (整数部分) + (小数部分)であるから、 $\sqrt{2} = a + b$ (a は整数、 $0 \leq b < 1$) なる a と b を探す必要があります。

しかし、 $\sqrt{2}$ の近似値は有名で、 $\sqrt{2} = 1.41421356\dots$ (ひと夜ひと夜に人見ごろ) と小数表示してしまえば、 $a=1$ 、 $b=0.41421356\dots$ となるのがわかります。ただ、この方法には少し不満があります。例えば $\sqrt{17}$ などのように根号内が大きな数になると、語呂合わせを覚えていなければ、電卓の力を借りるか開平法という難しく特殊な筆算で計算し、小数表示変換するしかなくなります。

この問題を解決するには、平方根に関する次の性質を利用するとよいでしょう。

$$a < b < c \text{ のとき, } \sqrt{a} < \sqrt{b} < \sqrt{c}$$

すなわち、 $16 < 17 < 25$ であるから、 $4 = \sqrt{16} < \sqrt{17} < \sqrt{25} = 5$ となり、整数部分は 4 と決まります。小数部分についてはどうでしょうか。やはり $\sqrt{17}$ の小数表示への変換が必要なのでしょうか。いえ、実はとてもうまい方法があるのです。先ほど紹介した①の式を見てください。(小数部分)について解いてみると、

$$(\text{小数部分}) = (\text{もとの数}) - (\text{整数部分})$$

となります。これに気づけば、 $\sqrt{17}$ の小数部分は $\sqrt{17} - 4$ となるわけです。何も小数部分だからといって、小数表示で答える必要はないのです。テストでは、整数部分と小数部分を求めることさえできれば十分です。

さて、前置きが長くなりましたが、ここからが本題です。この分野、これ以上広がりそうにないテーマのようですが、実はもとの数を負の数として考えてみると少し面白い性質があることに気づきます。例えば、負の有限小数 -2.4 について、整数部分と小数部分がどうなるかを考えてみて下さい。

A	-2.4	整数部分 $\rightarrow -2$	B	-2.4	整数部分 $\rightarrow -2$
		小数部分 $\rightarrow -0.4$			小数部分 $\rightarrow 0.4$

などとされた方はいらっしやらないでしょうか。Aは「小数部分は 0 以上 1 未満である」という定義に適合しません。また、B については①の式に代入すると $-2.4 = -2 + 0.4$ となり、等式が成り立ちません。つまり、整数部分は -2 ではなく、小数部分も 0.4 ではないのです。正解を発表する前に何が問題であったかを分析してみましょう。(問題を解き、正解して終わりでは数学を本質的に理解したとは言えません。問題を多角的に捉える習慣が大切です。)

①の式をさらに数学的に表現した次の式を用いると分かりやすくなります。

実数 x の整数部分を n とすると、 n は次の不等式を満たす整数である。

$$n \leq x < n + 1$$

$-3 \leq -2.4 < -2$ ですから、 -2.4 の整数部分は -3 、小数部分は $x - n$ で計算できるので、 0.6 になります。負の数を考える際は、正の数のときと異なり、一工夫が必要ですので、気を付けましょう。

(秀)