

最小公倍数とすだれ算

読者の皆さま、こんにちは。11月もあと少しになり、今週末はいよいよ文化祭です。今年はどうのような模擬店や展示があるのかとても楽しみです。

さて、今回は数学Aの整数の性質の章で学習する最大公約数・最小公倍数とその求め方にスポットを当ててみたいと思います。最大公約数と最小公倍数については、高校が初出ではなく、実は小学校で学習する内容ですが、整数の性質を語るうえでは外すことはできません。

定義：2つ以上の整数について、
最大公約数とは、公約数のうち最大のもの。
最小公倍数とは、公倍数のうち最小のもの。

高校の教科書では、最大公約数を求める場合、2つの整数をそれぞれ素因数分解し、その指数の小さい方を掛け合わせて求めます。また、最小公倍数を求める場合は、最大公約数を求める場合と同様に2つの整数をそれぞれ素因数分解し、その指数の大きい方を掛け合わせて求める方法が紹介されています。(図1)

(図1) 48と180の最大公約数と最小公倍数の求め方。

<p>(最大公約数)</p> $48 = 2^4 \cdot 3$ $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ $2^2 \cdot 3 = 12$ <p>指数の小さい方</p>	<p>(最小公倍数)</p> $48 = 2^4 \cdot 3$ $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$ <p>指数の大きい方</p>
---	--

しかし、小学校の時には「すだれ算」という割り算を繰り返し実行する筆算で求めていた記憶はないでしょうか。すだれ算は使い方も簡単で、整数の素因数分解、最大公約数や最小公倍数を容易に求めることができます。(図2)

(図 2) 左から 12 の素因数分解, 4 と 6 の最大公約数と最小公倍数の求め方

$$\begin{array}{r} 2 \overline{)12} \\ 2 \overline{)6} \\ \quad 3 \\ 12=2^2 \cdot 3 \end{array}$$

$$\boxed{2} \overline{)4 \ 6}$$

最大公約数 → $\boxed{2}$

最小公倍数 → $\boxed{2} \cdot 2 \cdot 3 = 12$

さて、今回はこのすだれ算を用いる際の注意点について話をしていきたいと思います。先ほどの例では 2 つの整数について調べましたが、3 つ以上の整数についてももちろん最大公約数と最小公倍数を考えることができます。今度は 6 と 18 と 27 の 3 つの整数の最大公約数と最小公倍数をすだれ算を用いて求めてみましょう。

最大公約数については(図 3)の通りで、3 つを「同時に」割り切る 3 で割ります。ですから、最後 2, 6, 9 が残ったとき、2 と 6 「のみ」を同時に割る 2 や、6 と 9 「のみ」を同時に割る 3 でさらに割ることは許されません。したがって、最大公約数は 3 です。

(図 3)

$$\boxed{3} \overline{)6 \ 18 \ 27}$$

$$2 \quad 6 \quad 9$$

最大公約数 → $\boxed{3}$

最小公倍数 → $\boxed{3} \cdot 2 \cdot 6 \cdot 9 = 324$?

(図 4)

$$\begin{array}{r} 3 \overline{)6 \ 18 \ 27} \\ 2 \overline{)2 \ 6 \ 9} \\ 3 \overline{)1 \ 3 \ 9} \\ \quad 1 \quad 1 \quad 3 \end{array}$$

最小公倍数 → $3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 54$

続いて、6 と 18 と 27 の最小公倍数を、同様にすだれ算を用いて求めてみましょう。最大公約数で計算した図 3 をもう一度ご覧ください。3 つの数を同時に割り切る 3 で割った後、残ったのは 2, 6, 9 でもうこれ以上同時に割り切る数はありません。よって、最小公倍数を $3 \times 2 \times 6 \times 9 = 324$ としてしまうと間違いです。最小公倍数に関しては 3 つを同時に割り切れなくとも、2 つを同時に割り切る数があればその数でさらに割る必要があるのです。2 と 6 を同時に割り切る 2 で割り (9 はそのまま下に下ろす)、さらに 3 と 9 を同時に割り切る 3 で割り、求める最小公倍数は $3 \times 2 \times 3 \times 3 = 54$ となります(図 4)。

なぜ最小公倍数がこのように求まるかは、これまでの記述内容にヒントが隠されていますので、一度じっくり考えてみて下さい。そして今度は、36 などを追加して、4 つの数 6 と 18 と 27 と 36 の最小公倍数を求めるには、どのように計算すればよいか、仮説を立てて検証してみたいかがででしょうか。きっと、この分野に対してさらに理解が深まることでしょう。

(秀)