たのしいサイエンス通信 26

2019.01.17

水汲み問題

中学生の問題で次のようなものがありました。

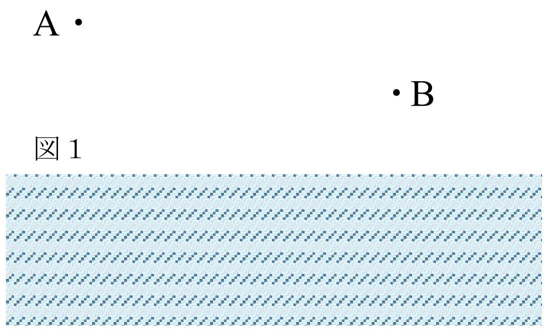


図１

A 地点にいる人が川で水を汲んで B 地点まで行くときの最短経路を求めよ

この問題の「数学の問題としての解答」は，図２のように点 B を河岸に関して対称移動させた点 B'を考え，AB'を結ぶ線分を河岸との交点を水を汲む場所 P としてそこで折り返す経路です（ビリヤードのバンクショットはこれを意識して打ちます。なかなかうまくいかない（涙））。しかしたまに捻くれて，水は重いのだから水を運ぶ距離が最短となる図３の経路がベストだと言い張る者もいますね。でもまあそれも真実。無視するわけにもいくまい。元の問題では AP+PB の最小値を問うているのに対し，AP+kPB の最小値を問う問題として k の値（水を運ぶ労力が空のときの k 倍になる）をとても大きくして考えたものとしているようです。

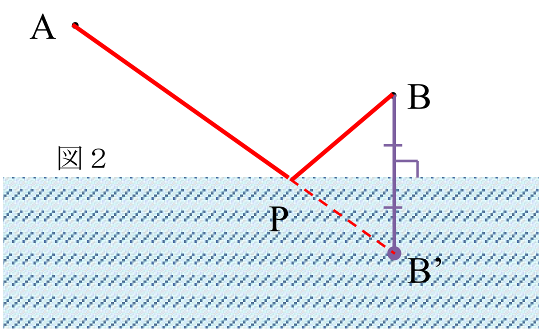


図２

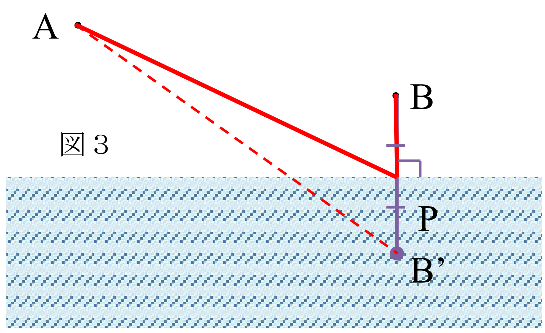


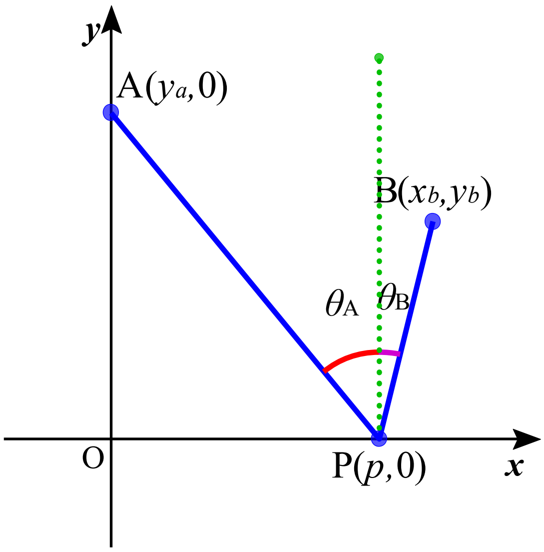
図３

では一般に AP+kPB の最小値はどのようになるのかを考えてみましょう。このあたりから高校の数学が役に立ってきます。図のように$\mathrm{A}(0, y_a), \mathrm{B}(x_b, y_b), \mathrm{P}(p, 0)$

と座標に置くと

$$l = \mathrm{AP} + k\mathrm{PB} = \sqrt{p^2 + y_a^2} + k\sqrt{(x_b - p)^2 + y_b^2}$$

$$\frac{dl}{dp} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + y_b^2}} - \frac{k(x_b - p)}{\sqrt{(x_b - p)^2 + y_b^2}}$$



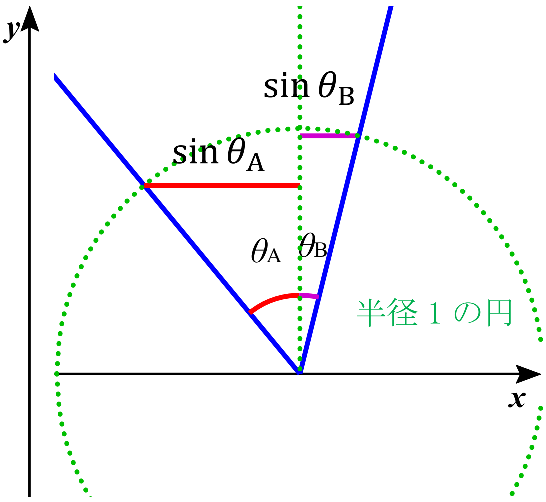
ここで，直線$x = p$と線分 AP，線分 PB とでなす角をそれぞれ$\theta_{\mathrm{A}}, \theta_{\mathrm{B}}$とすると

$$\frac{dl}{dp} = \sin\theta_{\mathrm{A}} - k\sin\theta_{\mathrm{B}}$$

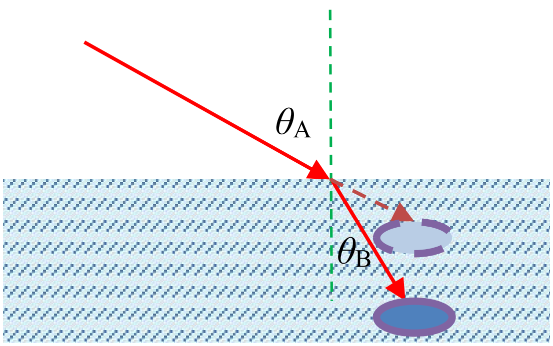
となり，lが最小になるためには

$$\sin\theta_{\mathrm{A}} = k\sin\theta_{\mathrm{B}}$$

になるように位置を決めればいいのですね。



この問題，実はすでにライフガードが砂浜を走って海を泳いで目標物にたどり着くまでの最短経路の問題として，かの有名な物理学者ファインマンが考えていたのですね。私の考えている程度のことはすでに先人も考えているのです。残念。



これは光の屈折と非常に深い関係があります。光は水中では速度が遅くなる（相対性理論的な考えは無しね）のがこの泳ぐのは走るのより遅くなるというのに似ています。**光が一番速く進むように曲がる**のです。これを**フェルマーの原理**といいます。これよりこのような屈折（**スネルの法則**）が起こります。水中の物が浅いところにあるように見えるのはこのためです。人は光は曲がっているのにまっすぐに進んでいるものと見て左図の上の点線のところにあると勝手に錯覚してしまうのです。　（逸）