たのしい サイエンス通信

2019.02.21

31

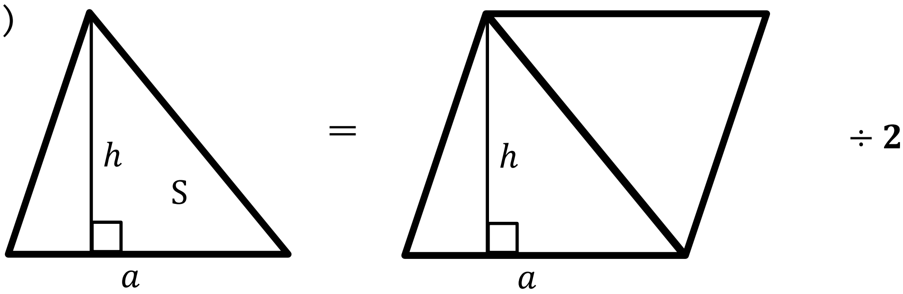
三角形の面積公式

読者の皆さま，こんにちは。まだまだ寒い季節が続きますが，春はもうすぐ目の前です。来週はついに卒業式です。今年の卒業生は私が教師になって一番初めに授業を受け持ったクラスも含まれていて，様々な思い出がよみがえってきます。本当に月日が経つのは早いものです。

さて，数学Ⅰで正弦・余弦を利用して三角形の面積が求められることを学びます。三角形の面積は小学校で学習した(**公式①**)が有名ですね。合同な三角形をもう一つ用意しておいて，平行四辺形の面積の半分になるという考え方(**図1**)で面積Sが求められます。底辺の長さa，高さhがわかっている三角形の面積はこの公式を使えば十分です。

(**公式①**)　$\mathrm{S} = \frac{1}{2}ah$

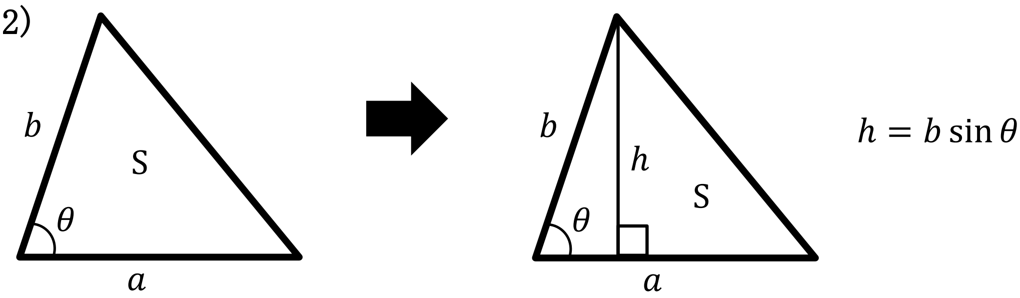
(**図1**)



次に，正弦を用いて三角形の面積を求めてみましょう。2つの辺の長さとその間の角の大きさがわかっている場合(**図2**)です。(**公式②**)で求めることができます。

(**公式②**)　$\mathrm{S} = \frac{1}{2}ab\sin\theta \quad h = b\sin\theta$

(**図2**)

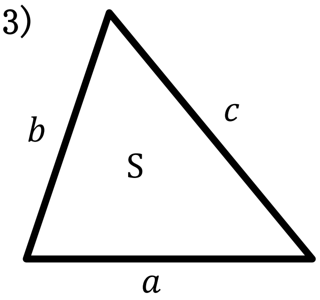


同じ三角形の面積でも，わかっている箇所が変わると，これほど式も変わってしまうわけです。しかし，一見全く異なる形をしていますが，その成り立ちを考えると，この 2 つの公式は全く別物でもないことが分かります。(図 2) の三角形に高さhを書き込んでみると，鋭角の三角比の定義から$h = b\sin\theta$が導かれるので，(公式①) に代入して計算すると，簡単に (公式②) が導けます。

三角形の 3 つの辺の長さがすべてわかっている場合は，少々やっかいです。余弦定理から余弦の値を計算し，三角比の相互関係から正弦の値を求め，(公式②) に代入するという 3 つのステップを踏む必要があります。実は，その一連の手順をシンプルな一つの公式にまとめたものが一般に「ヘロンの公式」と呼ばれる (公式③) です。この公式は土木や不動産の業界で土地の面積を計算する際などに広く利用されているようです。今から二千年も前に発見された数学の公式が今も世の中の役に立っているなんて，なんかいい話ですよね。

(公式③)　$\mathrm{S} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$　　　ただし，$\mathrm{s} = \frac{1}{2}(a+b+c)$

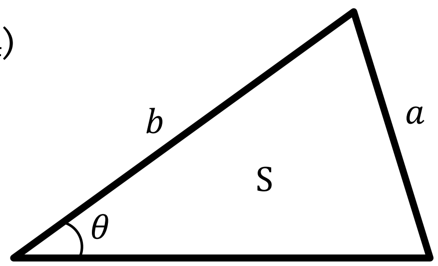
(図 3)



ちなみに・・・，私も何か三角形の面積を求めるシンプルな公式が無いか探してみました。2 つの辺とその間にない角の大きさを用いて，(公式④) を無理やりですが導きました（図 4)。

(公式④)　$\mathrm{S} = \frac{1}{2}b\sin\theta\,(b\cos\theta \pm \sqrt{a^2 - b^2\sin^2\theta})$

(図 4)



式の中に$\pm$が入っているのが若干気になるところですが，これには理由があります。興味のある方は，(図　4) を利用して意味を探ってみるのも面白いと思います。その前にこんな複雑な公式，とても実用的ではないですよね。教科書に載っていないのも頷けます。

他にも，3 つの辺の長さと，内接円や外接円の半径を利用した三角形の面積公式などもあります。数学Ⅱや数学 B でも座標やベクトルを用いた三角形の面積公式を学習するので，楽しみにしておいて下さい。　　　　（秀）