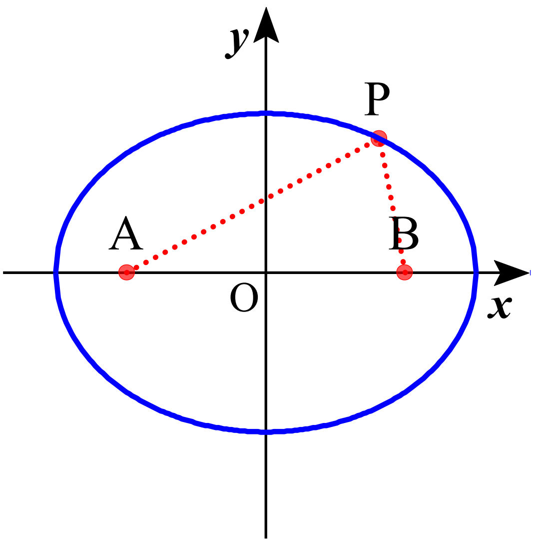
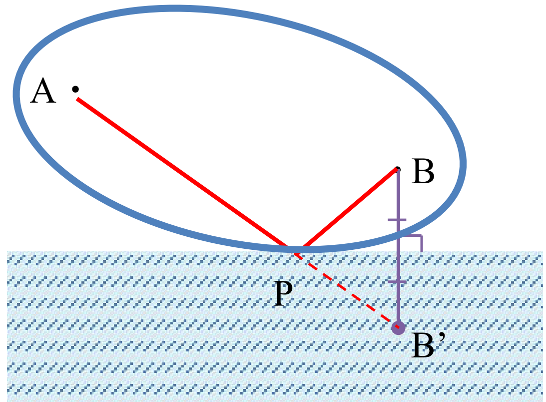
たのしいサイエンス通信

2019.03.07

33

デカルトの卵形線

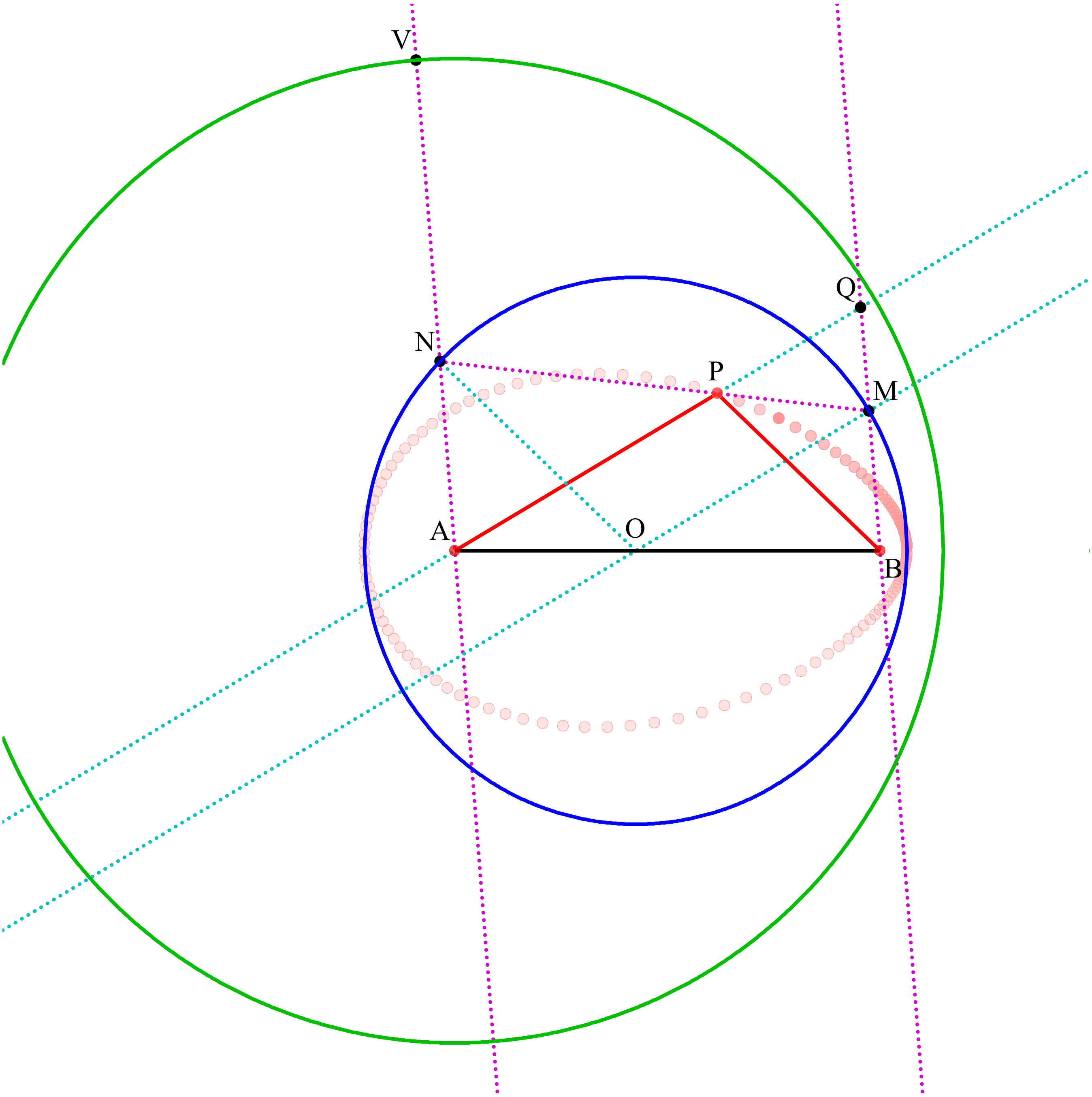




前回の水汲み問題で AP+BP が最短となる経路を考えましたが，数学屋として AP+PB として考えたいのが**楕円**です。楕円というのは２点 A,B と点 P があり，AP+PB の値が一定である(c を定数として$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}=c$となる)点の軌跡です。この２点 A,B をこの楕円の**焦点**といいます。この問題に当てはめると，A,B を焦点とする楕円が川に接するようにして，その接点が水を汲む点 P となります。

では前回同様これを AP+kBP のときに拡張したいと考えるのが自然です。AP+kBP=c となる P の軌跡の描く図形はどのようなものになるでしょうか。

平面上に２点 A,B を取り，線分 AB を k:1 に内分する点を O とする。O を中心に点 A,B を内包するように半径 r の円 C_1 を描き，また A を中心に便宜上の円 C_2 を描く。円 C_2 上に点 V を取り，半直線 AV と円 C_1 との交点を N，点 B を通り半直線 AV に平行な直線と円 C_1 との交点のうち，直線 AB に関して点 N と同じ側にある点を M とする。点 A を通り直線 OM と平行な直線が直線 MN と交わる点を P とすると，$\mathrm{AP}+k\mathrm{PB}=(1+k)r$ となる。



ざっくりとした証明

$\mathrm{AO}:\mathrm{BO}=k:1$ とする。パップスの定理により $\mathrm{ON}\parallel\mathrm{BP}$

$\angle\mathrm{MPB}=\angle\mathrm{MNO}=\angle\mathrm{OMN}=\angle\mathrm{MPC}$ より $\mathrm{PQ}:\mathrm{PB}=\mathrm{QM}:\mathrm{BM}=\mathrm{AO}:\mathrm{BO}$

$\mathrm{PC}=k\mathrm{PB}$ より $\mathrm{AP}+k\mathrm{PB}=\mathrm{AP}+\mathrm{PQ}=\mathrm{AQ}=(1+k)\mathrm{OM}=(1+k)r$

　ところでこの点 V が円 C_2 上を 1 周するときの点 P の軌跡は図のようにとてもきれいな卵形になります。この曲線は**デカルトの卵形線**と呼ばれます。

（逸）

参考：デカルトの卵形線の短軸および卵形面　　蛭子井　博孝

https://www.jstage.jst.go.jp/article/jsgs1967/29/2/29_2_3/_pdf