たのしいサイエンス通信

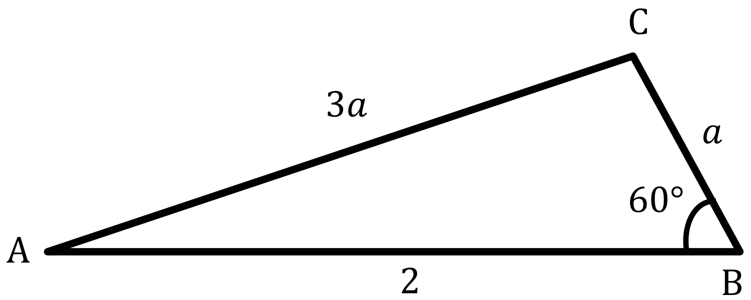
2019年度 4

吟味の大切さ

読者の皆さま，こんにちは。今週末からいよいよ定期考査が始まります。1年生は高校に入学してから初めての考査で，不安が大きいと思いますが，普段の努力の成果を発揮してもらいたいものです。考査が終わると，校外教授（日帰りの遠足），体育祭，保護者懇談と行事が目白押しです。科によっては検定試験が毎週のように行われる大変忙しい時期に入ります。充実した高校生活になるよう頑張っていきましょう。

さて，前回に引き続き数学Ⅰの話題です。先日，ある生徒から次の問題について面白い質問がありました。解法によって答えが変わってしまうそうです。

> △ABCにおいて，$B=60°$，$a:b=1:3$，$c=2$であるとき，aを求めよ。



余弦定理を用いれば簡単に解ける基本的な問題です。まずは自然な解法を（解1）として記述しておきます。

（解1）

> $a:b=1:3$より，$b=3a$とおける。
>
> 余弦定理より，$(3a)^2=2^2+a^2-2\cdot 2\cdot a\cos 60°$
>
> 整理して，$4a^2+a-2=0$　　　$a>0$より，$a=\frac{-1+\sqrt{33}}{8}$

以上で解決です。

ところが，その生徒は次のようにも考えてaの値を求めました。

(解 2)

正弦定理より，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{3a}{\sin 60^\circ}$ $\therefore$ $\sin A=a\times\dfrac{\sin 60^\circ}{3a}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

$A<120^\circ$より，$\cos A>-\frac{1}{2}$ $\therefore$ $\cos A=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{33}}{6}$

余弦定理より，$a^2=2^2+(3a)^2-2\cdot 2\cdot 3a\cos A$

整理して，$4a^2-\sqrt{33}a+2=0$ $\therefore$ $a=\frac{\sqrt{33}\pm 1}{8}$

困ったことに，(解 1) と (解 2) で答えが異なってしまいました。(解 2) の$a=\frac{\sqrt{33}-1}{8}$については，(解 1) と一致するので問題ないのですが，$a=\frac{\sqrt{33}+1}{8}$に関しては，(解 1) では出てこない値です。一体何が問題だったのでしょうか。そして正解はどちらなのでしょうか。もう一度，解答を見直してみましょう。

数学の問題を解決する手段として大抵，複数通りの考え方があり，その別解を考えることが数学の面白さの一つと私は考えています。数学的に正しい議論を行えば，たとえアプローチが異なっていても結論は一致するのです。(解 1) は角Bに余弦定理を適用し，一直線で結論を導いています。一方，(解 2) は，わざわざ角度が不明の角Aに対して余弦定理を用いています。ただ，誤った議論は見当たりません。ここで数学Ⅰの教科書を開いて下さい。次の事実は学習しましたよね。

△ＡＢＣにおいて，

Bは鋭角 $\Leftrightarrow$ $c^2+a^2-b^2>0$

角Bは60°と鋭角ですから，辺の長さについて，$a>0$かつ$2^2+a^2-(3a)^2>0$すなわち，$0<a<\frac{1}{\sqrt{2}}$ が満たされることが必要になってくるのです。(解 1) と (解 2) で得られた$\frac{\sqrt{33}-1}{8}$については，$0<\frac{\sqrt{33}-1}{8}<\frac{1}{\sqrt{2}}$を満たしていますが，(解 2) で得られた$\frac{\sqrt{33}+1}{8}$については，$\frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{\sqrt{33}+1}{8}$となるので，不適ということです。このように，数学では，一見正しい議論を行っているようでも，陥穽が潜んでいることが多々ありますので，答えが出たと思っても，今一度吟味を行うことをお勧めします。(秀)