たのしい　　　　　　　　2019.07.11

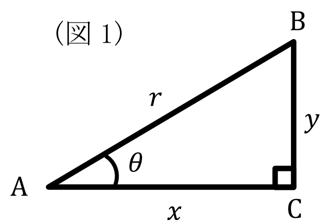
サイエンス通信 (11)

$\sin\theta$の値を調べよう　第１回

読者の皆さま，こんにちは。今週で定期考査が終わり，来週末からはいよいよ長い長い夏期休暇が始まります。勉強やクラブ活動，ボランティア活動など，今しかできないことに全力で取り組みましょう。

今回は，$\sin\theta$ ($\theta=n°$, nは 0 から 90 までの整数) の値を求めてみます。数学Ⅰではθが 0°，30°，45°，60°，90° のときの三角比の値は学習しました。鋭角の三角比は直角三角形の辺の長さの比の値で定義されます(図 1)。

(図 1)



$$\begin{cases} \sin\theta=\dfrac{y}{r} \\ \cos\theta=\dfrac{x}{r} \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

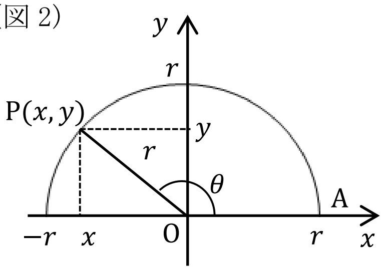
例えば，$\theta=30°$ のときは$r=2$，$y=1$であるから，$\sin 30°=\frac{1}{2}$，

$\theta=45°$ のときは$r=\sqrt{2}$，$y=1$であるから，$\sin 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$，

$\theta=60°$ のときは$r=2$，$y=\sqrt{3}$であるから，$\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

θが 0° と 90° のときは，直角三角形を作ることができないので，別の定義が必要になります。それが座標を用いた定義です(図 2)。この定義により，さらに鈍角や 180° の三角比を考えることができます。

(図 2)



$$\begin{cases} \sin\theta=\dfrac{y}{r} \\ \cos\theta=\dfrac{x}{r} \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

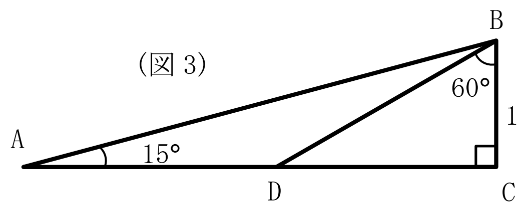
$\theta=0°$ のときは$y=0$であるから，$\sin 0°=\frac{0}{r}=0$，

$\theta=90°$ のときは$y=r$であるから，$\sin 90°=\frac{r}{r}=1$となります。

それ以外の角度の三角比の値は，15° と 18° と 36°，54° と 72° と 75° が数学Ⅰの範囲で求めることができます。ただし，54° と 72° と 75° に関しては，45° 以下の角の三角比への変換公式である余角の公式$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$を用いればよいので，ここでは 15° と 18° と 36° の 3 つの角について考えます。

まず，$\sin 15°$ の値は，有名な次の直角三角形(図 3)を用いれば求めることができますね。辺 AB，AC の長さに注目して，一度考えてみてください。

(図 3)



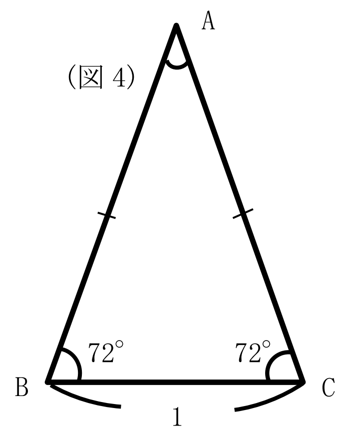
sinの加法定理

◆ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

次に，数学Ⅱで加法定理を学習した人向けの別解を紹介します。$15°=45°-30°$ から，$\sin 15°=\sin(45°-30°)=\sin 45°\cos 30°-\cos 45°\sin 30°=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ となります。加法定理の方は，面白みには欠けますが確実に計算できるのでオススメです。

最後に，$\sin 18°$ と$\sin 36°$ の値ですが，これは次のような底角が 72° の二等辺三角形(図 4)を利用すれば，どちらの値も計算で求めることができます。ただし，補助線が 3 本ほど必要になってきますので，試行錯誤して発見してみてください。なお，数Ⅱで学習する倍角の公式と 3 倍角の公式を利用して$\sin 18°$ の値を求める面白い方法もありますので，興味のある方は，下に示す道具を基に考えてみて下さい。　(秀)

(図 4)



$\sin 18°$ を求めるための 3 つの道具

(倍角の公式) $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

(3 倍角の公式) $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

($\alpha=18°$のときに成り立つ等式) $\cos 2\alpha=\sin 3\alpha$