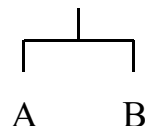


## 宿命のライバル対決と確率

クラブの夏大会も始まっています。宿命のライバルである A と B がトーナメント（本当はトーナメントじゃなく **single elimination** というのですが（2016年度たのしい数学通信(13)を参照）…）の大会で対決する（しかも決勝で）というわけとらしい構図は漫画ではよくあるパターンですが、現実には早く当たるかもしれないし、いずれかが早々に敗退するかもしれません。そのあたりを踏まえ、A と B が対戦することができる確率を求めてみましょう。

まずわかりやすいように  $2^n$  人のトーナメントを考えます。またすべての人の勝つ確率は等しく  $\frac{1}{2}$  とします。

$n=1$ （2人）のときは100%ですね（^^）。確率は1です。



$n=2$ （4人）のときは

① 1回戦で当たる

A の相手が B となるのは3人のうちの1人なので  $\frac{1}{3}$  です。

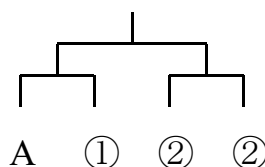
② 2回戦（決勝）で当たる

B は1回戦で A と当らない方に入らないといけない。

その確率は  $\frac{2}{3}$ 。また、それぞれが決勝に行くためには A が1回戦を勝ち、B も

1回戦を勝たないといけない。それぞれの確率は  $\frac{1}{2}$  なので  $\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$ 。

したがって求める確率は  $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ 。



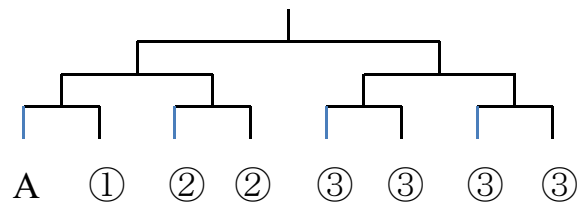
$n=3$  (8人)のときは

① 1回戦で当たる

Aの相手がBとなるのは7人のうちの1人なので  $\frac{1}{7}$  です。

② 2回戦で当たる

Bは2回戦でAと当たる島に入らないといけない。その確率は  $\frac{2}{7}$ 。また、それぞれが2回戦に行くためにはAが



1回戦を勝ち、Bも1回戦を勝たないといけない。それぞれの確率は  $\frac{1}{2}$  なので  $\frac{2}{7} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$ 。

③ 3回戦(決勝)で当たる

Bは3回戦でAと当たる島に入らないといけない。その確率は  $\frac{4}{7}$ 。また、それぞれが決勝に行くためにはAが2回勝ち、Bも2回勝たないといけないので  $\frac{4}{7} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4$ 。

したがって求める確率は  $\frac{1}{7} + \frac{2}{7} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{7} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = \frac{1}{4}$ 。

一般に  $2^n$  人のときには

$$\frac{1}{2^n - 1} + \frac{2}{2^n - 1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2^2}{2^n - 1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots + \frac{2^{n-1}}{2^n - 1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n-1)} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

となります。4人なら  $\frac{1}{2}$ , 8人なら  $\frac{1}{4}$ , 16人なら  $\frac{1}{8}$ , ...となっていますが、この様子じゃ例えば5人なら  $\frac{2}{5}$  など、 $m$ 人なら  $\frac{2}{m}$  となりそうな気がします。

ちょっと考え方を考えてみましょう。

$m$ 人のトーナメントでAが誰かに負ける確率は  $\frac{m-1}{m}$ 。その相手がBである確率は  $\frac{1}{m-1}$ なのでAがBに負ける確率は  $\frac{m-1}{m} \times \frac{1}{m-1} = \frac{1}{m}$ 。同様にBがAに負ける確率も  $\frac{1}{m}$ なので、AとBが対戦する確率は  $\frac{2}{m}$ 。なんともシンプルに解けます。この考え方だとトーナメント表の形には関係ないということもわかります。この解答を見たとき、改めて数学というのは暗記(だけ)じゃなくいかに頭を使うかということが大事なのだなと感じました。