

数学における記号について（その1）

数学では様々な記号が使用されているが、いくつかのタイプに分けることができる。一つは、2を10回かける「 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ 」を 2^{10} と表したり、「 $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ 」を $10!$ と表すように、普通に書くと長くなる内容を簡単に表すために使用する記号である。ただし、前者の 2^{10} は記号を使用しているのではなく、数字を書く位置によって特別な意味をもたせている。次は2乗して3になるような数を表すために必要となる $\sqrt{\quad}$ のような記号である。また、 π 、 e 、 i などの記号を使っているが数値を表しているものもある。

1. 記号！について

英文でよく使用されている感嘆符！は、数学で使用される場合は階乗といい、1から n までの自然数の積を $n!$ と表す。関数電卓では、この階乗の機能は必ずといってよいほど搭載されている。通常計算可能な数は $69!$ までで $69! = 1.711224524 \times 10^{98}$ と表示され、 $70!$ は100桁を超える（ $70! = 1.197857167 \times 10^{100}$ ）ため overflow などのエラーメッセージが表示される。

しかし、500桁まで計算可能な一部の電卓では $253! = 5.173460993 \times 10^{499}$ まで表示可能である。（ $5.173460993 \times 10^{499}$ は上位10桁が5.173460993で始まる499桁の数を意味する）

また、高校では学習しないが、 $10!!$ といった2重階乗というものもあり、この計算方法は、 $10!! = 10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2$ 、 $9!! = 9 \times 7 \times 5 \times 3 \times 1$ というように、偶数の場合は2ずつ減らしながら2になるまでの積を、奇数の場合は2ずつ減らしながら1になるまでの積を表す。

表計算ソフトのExcelでは階乗(FACT)および2重階乗(FACTDOUBLE)の関数機能が搭載されており、それぞれ最大で

$$170! = 7.257415615308 \times 10^{306},$$

$300!! = 8.1544140693806 \times 10^{307}$ まで表示可能である。

実際には Excel での表示は次のようになる。

$170! = 7.2574156153080E+306$, $300!! = 8.1544140693806E+307$

さらに、 n を正の実数とした場合は Γ 関数と呼ばれる特殊関数となる。

Γ 関数は実部が正となる複素数 z について

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \text{ で定義され、}$$

関数電卓 HP 35s

階乗の概念を複素数全体に拡張したものである。

Γ 関数と $n!$ との間には $\Gamma(n+1) = n!$ の関係が成り立っている。

HP 社の関数電卓や、Excel では Γ 関数(GAMMA)の値を求めることができる。

次の値は関数電卓 HP 35s で求めることができる最大の数である。

$$\Gamma(254.1190554) = 253.1190554! = 9.999997930 \times 10^{499}$$

また、 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ は数学に興味をもっている人にはよく知られている。



2. 記号 $\sqrt{\quad}$, \log について

中学 3 年で学習する $\sqrt{\quad}$ は、2 次方程式 $x^2=3$ の解を求める段階で必要となる。 $x^2=4$ を満たす x は ± 2 と有理数であるが、2 乗して 3 になる有理数は存在しない。したがって $\sqrt{\quad}$ を用いて $\pm\sqrt{3}$ と表すことになっている。

高校で学習する対数を表す記号 \log も同様である。

$2^2 = 4$, $2^3 = 8$ であるが、 $2^x = 5$ となる x を求めようとするとき上記の二次方程式の場合と同様に有理数で表すことができない。この指数方程式の解 x を表すのに必要となるのが \log という記号である。

「 $2^3 = 8$ 」を指数部分 = の形に書き換えるとき、対数記号を用いて「 $3 = \log_2 8$ 」と書き表すことになる。そのため、 $\log_2 8$ は「2 を 8 にするために何乗したらよいかという回数」を意味している。対数記号 \log を使用することにより、 $2^x = 5$ の解は $x = \log_2 5$ となる。

高等学校では、他に $\sin, \cos, \tan, \lim, \Sigma, {}_n C_r, {}_n P_r$ など多くの数学記号を学ぶが続きは次回で紹介する。