たのしいサイエンス通信

2019.09.12

18

$\sin\theta$の値を調べよう　第２回

読者の皆さま，こんにちは。9 月に入り，ようやく過ごしやすい気候になってきました。気づけば次の考査まで 1 か月を切りました。2 年生は考査明けすぐに修学旅行です。高校生活の思い出をたくさん作りましょう。

今回は，$\sin\theta$ ($\theta = n^\circ$,nは 0 から 90 までの整数) の値を求めてみようの第２回です。前回は，θの値が 0°，15°，18°，30°，36°，45°，54°，60°，72°，75°，90° のときの三角比(正弦)の値の求め方について，三角形や加法定理を用いて求める手法を紹介しました。残りの角の値についても求めてみましょう。3 の倍数の角の正弦値については加法定理を用いれば比較的容易に求めることができます。上記の 11 個の角の和や差を考えてみましょう。

例えば，$\sin 3^\circ$ の値は加法定理$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$を利用して，

$$
\begin{aligned}
\sin 3^\circ &= \sin(18^\circ - 15^\circ) = \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ \\
&= \frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\
&= \frac{1}{16}\left\{\sqrt{30}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{2}-\left(\sqrt{60+12\sqrt{5}}-\sqrt{20+4\sqrt{5}}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

と求められます。2 重根号が入ったままの式になってますが，この場合ははずすことはできません(2 重根号の外し方については後述いたします)。非常に長く複雑な式ですが，これ以上綺麗にはなりそうにないです。ところが，3 重根号を利用するともっと簡潔な式になると，同僚の先生に教えていただきました。ここからはその等式(**等式 A**)が成り立つことの検証を行います。少しでも計算間違いをしてしまうと合わなくなる大変繊細な作業ですが，少しだけお付き合いください。

等式 A

$$
\frac{1}{16}\left\{\sqrt{30}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{2}-\left(\sqrt{60+12\sqrt{5}}-\sqrt{20+4\sqrt{5}}\right)\right\}=\frac{1}{4}\sqrt{8-\sqrt{3}-\sqrt{15}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}
$$

検証の前に，数学Ⅰで学習した2重根号の外し方について，少しおさらいしてみましょう。

<u>**2重根号**</u>　　$a>0$，$b>0$ とする。

①$\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$　　②$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$　　（$a>b$）

等式Aは，左辺から右辺へ変形したいので，この公式を右辺から左辺へ利用し，

$\sqrt{30}+\sqrt{10}=\sqrt{40+2\sqrt{300}}=\sqrt{40+20\sqrt{3}}$

$-\sqrt{6}-\sqrt{2}=-(\sqrt{6}+\sqrt{2})=-\sqrt{8+2\sqrt{12}}=-\sqrt{8+4\sqrt{3}}$　となるから，

$\sqrt{30}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{2}=\sqrt{40+20\sqrt{3}}-\sqrt{8+4\sqrt{3}}$

$=\sqrt{(48+24\sqrt{3})-2\sqrt{560+320\sqrt{3}}}=\sqrt{(48+24\sqrt{3})-2\sqrt{80(7+2\sqrt{12})}}$

$=\sqrt{48+24\sqrt{3}-16\sqrt{5}-8\sqrt{15}}$　　　　また，

$\sqrt{60+12\sqrt{5}}-\sqrt{20+4\sqrt{5}}=\sqrt{(60+12\sqrt{5}+20+4\sqrt{5})-2\sqrt{(60+12\sqrt{5})(20+4\sqrt{5})}}$

$=\sqrt{(80+16\sqrt{5})-2\sqrt{1440+480\sqrt{5}}}=\sqrt{(80+16\sqrt{5})-8\sqrt{15}\sqrt{6+2\sqrt{5}}}$

$=\sqrt{80-40\sqrt{3}+16\sqrt{5}-8\sqrt{15}}$　　　　よって，

（**等式A**の左辺×16）$=\sqrt{48+24\sqrt{3}-16\sqrt{5}-8\sqrt{15}}-\sqrt{80-40\sqrt{3}+16\sqrt{5}-8\sqrt{15}}$

$=\sqrt{(A+B)-2\sqrt{AB}}=\sqrt{128-16\sqrt{3}-16\sqrt{15}-2\sqrt{AB}}$

$A=48+24\sqrt{3}-16\sqrt{5}-8\sqrt{15}$

$B=80-40\sqrt{3}+16\sqrt{5}-8\sqrt{15}$とおいた。

$=\sqrt{128-16\sqrt{3}-16\sqrt{15}-2\sqrt{640-128\sqrt{5}}}=\sqrt{128-16\sqrt{3}-16\sqrt{15}-16\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$

$=4\sqrt{8-\sqrt{3}-\sqrt{15}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$　　　　ゆえに，$\sin 3^\circ=\frac{1}{4}\sqrt{8-\sqrt{3}-\sqrt{15}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$

となり，結論を得ます。計算式の羅列になって恐縮ですが，3重根号を利用することで少々見やすい式で表せることがわかりました。途中，2重根号をはずせることに気付かなかったり，計算間違いなどで何度も挫折しかかりましたが，延べ3時間ほどかけて無事正解にたどり着いたときはそれまでの疲れが一気に吹き飛びました。参考までに，　$\sin 6^\circ=\frac{1}{4}\sqrt{9-\sqrt{5}-\sqrt{30+6\sqrt{5}}}$

となるようです。腕試しに挑戦されてみてはいかがでしょうか。　　　　（秀）

<u>**参考文献**</u>　　　TA先生の特製プリント