たのしい サイエンス通信 (22)

2019.10.10

数学における記号について（その２）

今回は高等学校で学ぶ数学記号のうち数学 B の数列で使用するギリシャ文字 Σについて紹介する。

1 から 100 までの自然数の和「1 + 2 + 3 +・・・+ 99 +100」を求める方法については、次のように 1 から 100 までを逆に並べた和を計算すると
101 を 100 回たすことになるので 101×100÷2 = 5050 となる。

$$
\begin{array}{r}
1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100 \\
+)\ 100 + 99 + 98 + \cdots + 3 + 2 + 1 \\
\hline
101 + 101 + 101 + \cdots + 101 + 101 + 101
\end{array}
$$

同様にすると、

1 から 10 までの自然数の和は	55
1 から 1000 までの自然数の和は	500500
1 から 10000 までの自然数の和は	50005000

といった規則性が見えてくる。
数学ではこういう規則性を見出すことが重要である。
さて、1 から 100 までの自然数の和
1 + 2+ 3+・・・+99 +100 を $\sum_{k=1}^{100} k$ と表す。
この記号は k に 1 から順に 2, 3, 4,・・・, 100 まで代入した値の和を表す。

10 から 100 までの自然数の和は $\sum_{k=10}^{100} k$ と表す。また、$\sum_{k=1}^{91}(k+9)$と表すこともできる。どちらの式も、k にΣの下に書かれている k の値を代入し、k の値を 1 ずつ増やし、Σの上に書かれている数になるまでの和を表すと 10 + 11+ 12+・・・+99 +100 となる。

では、1 から 100 までの偶数の和はどのように表せるだろうか？
偶数の和は 2 + 4+ 6+・・・+98 +100 となるが、1 番目(第 1 項)が 2、2 番目(第 2 項)が 4、最後の 100 は 50 番目(第 50 項)となるので、$\sum_{k=1}^{50} 2k$ と表す。

では、1 から 100 までの奇数の和はどのように表せるだろうか？
奇数の和は 1 + 3+ 5+・・・+97 + 99 となり、偶数の和と比べると 50 項すべてが偶数より 1 少ないと考えると $\sum_{k=1}^{50}(2k-1)$となる。
それでは、Σを使って表された式の計算はどうするのかについて考えてみる。
1 から n までの自然数の和を求めると次のようになる。

$$
\begin{array}{r}
1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n \\
+)\ n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 \\
\hline
(n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)
\end{array}
\quad \leftarrow (n+1) \text{ が } n \text{ 項}
$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)}$$

この式を利用すると 1 から 1000 までの自然数の和は、右辺の n に 1000 を代入して 1000×1001÷2 = 500500 となる。
この式以外にも、次の関係式が成り立つ。

$$\sum_{k=1}^{n} c = nc \quad (c \text{ は定数}) \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} ck = c\sum_{k=1}^{n} k \quad (c \text{ は定数}) \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2} n(n+1)\right\}^2$$

これを利用すると 1 から 100 までの偶数の和と奇数の和は

$$\sum_{k=1}^{50} 2k = 2\sum_{k=1}^{50} k = 50 \times 51 = 2550,$$

$$\sum_{k=1}^{50}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{50} k - \sum_{k=1}^{50} 1 = 2550 - 50 = 2500$$

10 から 100 までの自然数の和は $\sum_{k=1}^{91}(k+9) = \sum_{k=1}^{91} k + \sum_{k=1}^{91} 9 = 91 \times 92 \div 2 + 9 \times 91$
$= 91 \times 46 + 9 \times 91 = 91 \times (46+9) = 91 \times 55 = 5005$

Σの下が $k = 1$ でない場合は次のように変形すると上記の関係式を利用することができ、同じ結果が得られる。

$$\sum_{k=10}^{100} k = \sum_{k=1}^{100} k - \sum_{k=1}^{9} k = 100 \times 101 \div 2 - 9 \times 10 \div 2 = 5050 - 45 = 5005$$

今回は、Σの記号の意味と数値での計算を中心に数列を学んでいない人を対象にしているため基本事項のみ紹介しています。

(TA)