たのしいサイエンス通信
2019.11.14
25

空間における三角形の面積公式

　読者の皆さま，こんにちは。早いもので今年ももう僅かになりました。今回は数学Ｂのベクトルについて，日頃抱いていた疑問からのレポートです。

　ベクトルは向きと大きさをもつ量であり，その概念は平面から空間へ拡張ができ，平面上のベクトルで成り立つ性質はそのほとんどが，空間のベクトルでも成り立ちます。ですから，空間ベクトルの授業においては，「平面ベクトルと同様に」で説明できる箇所が多々あります。しかし，一部では，平面と空間で違いを意識しなければならない箇所もあります。

　タイトルにもあるように，三角形の面積を求める公式についてみてみましょう。平面ベクトルで学習する，次のような三角形の面積公式をご存じでしょうか。

<u>平面の三角形の面積</u>

①$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$のとき，△OABの面積Sは，

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

②$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$のとき，△OABの面積Sは，

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2}$$

①は数学Ⅰで学習した三角形の面積公式$\mathrm{S}=\frac{1}{2}ab\sin\theta$や$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$などを組み合わせることにより導くことができます。

また，②は①の公式の成分表示版です。①に$|\vec{a}|^2=a_1{}^2+a_2{}^2$や$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$などを代入し，整理すれば得られます。いずれも計算の練習にご確認を。

さて，***①については，空間においても成り立つことが知られております。***問題は②の成分表示の公式が空間ではどのように表現できるかです。様々な教科書や参考書を見てみても，なかなかその答えについて触れているものはありませんでした。そこで，気になったので自ら検証してみました。数学は，答えが手元に無く

ても頑張れば自力で調べられるところが面白いですね。

> **<u>空間の三角形の面積</u>**
> $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$のとき，△OABの面積Sは，
> S＝？？

早速求めてみましょう。

$|\vec{a}|^2=a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2$，　$|\vec{b}|^2=b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2$，　$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$より，

$$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$
$$=a_1{}^2b_2{}^2+a_1{}^2b_3{}^2+a_2{}^2b_1{}^2+a_2{}^2b_3{}^2+a_3{}^2b_1{}^2+a_3{}^2b_2{}^2$$
$$-2a_1a_2b_1b_2-2a_1a_3b_1b_3-2a_2a_3b_2b_3$$
$$=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

したがって，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}$$

・・・★

というスッキリした形になります。※実は根号部分はベクトルの外積の大きさです。

さて，実際に具体的な問題で，空間の三角形の面積を求めてみましょう。

> **<u>問題</u>**
> 2点A$(-2,\ 3,\ 1)$，B$(-1,\ 2,\ 3)$がある。このとき，△OABの面積Sを求めよ。

（解1）①の面積公式を利用して，

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とすると，$|\vec{a}|^2=14$，$|\vec{b}|^2=14$，$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=121$だから，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{75}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

（解2）$\vec{a}=(-2,\ 3,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 2,\ 3)$だから，★の面積公式を利用して，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{7^2+5^2+(-1)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{75}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

解2では根号の中身を計算するのが，対応を確認するのに時間がかかります。★の面積公式が教科書に出てこない理由がわかった気がします。

他にもベクトルの平行条件$(a_1b_2-a_2b_1=0)$なども空間版があります。ぜひご確認ください。　（秀）