たのしいサイエンス通信

2020.01.23

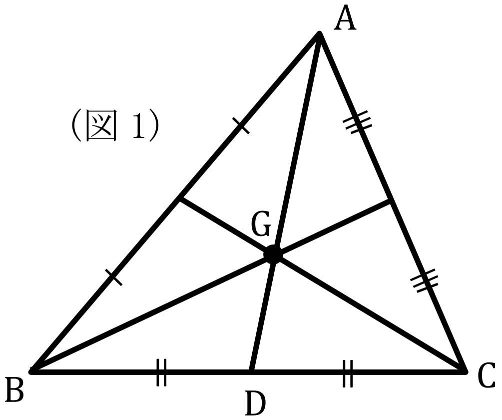
32

三角形の五心の位置ベクトル　第１回

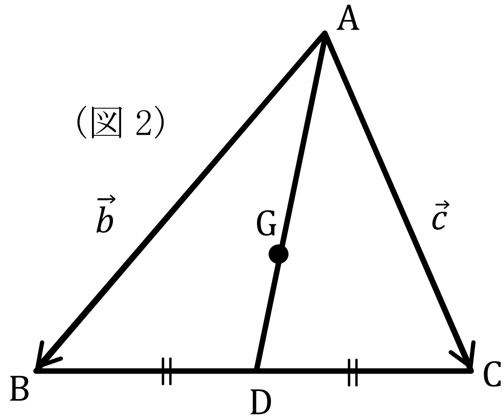
読者の皆さま，新年あけましておめでとうございます。今年もサイエンス通信を宜しくお願い致します。さて，三角形には重心・内心・外心・垂心・傍心と呼ばれる五心が存在するのをご存じでしょうか。高校では，数学 A の平面図形，数学Ⅱの図形と方程式, 数学 B のベクトルの単元において取り扱われます。今回は，***三角形の五心をベクトルを用いて表してみよう***というのがテーマです。まず第 1 回として，重心と内心の位置ベクトルについて調べていきたいと思います。

図 1 は三角形△ABCの重心Gです。重心は 3 本の中線が交わる点です。各中線を 2：1 に内分することはよく知られている事実です。

(図 1)



(図 2)



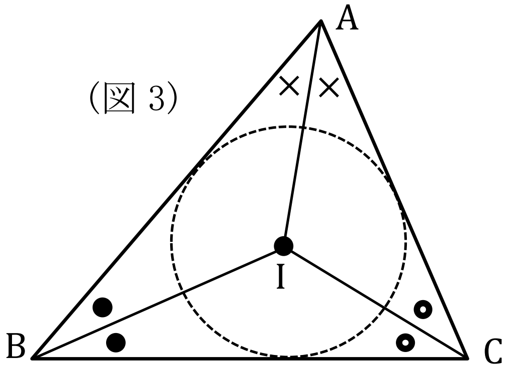
ベクトルを用いて書き直した図が図 2 です。今回は基準となる点をAとした位置ベクトル$\overrightarrow{AB}=\vec{b},\ \overrightarrow{AC}=\vec{c}$　を用いて$\overrightarrow{AG}$を計算してみましょう。まず，点Dは線分BCの中点ですから，内分点の位置ベクトルの公式を用いて，$\overrightarrow{AD}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$　と表せます。さらに，AG：GD＝2：1より，$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}$　が得られます。

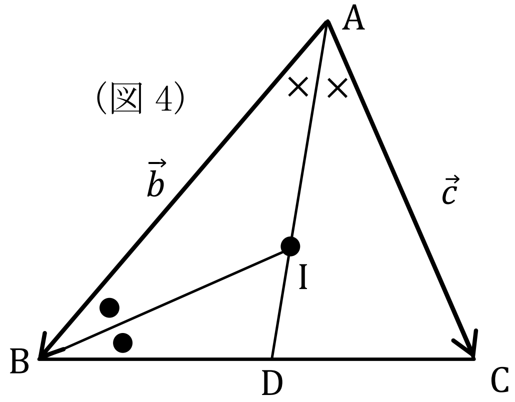
<u>△ABCの重心Gの位置ベクトル</u>

△ABC において，$\overrightarrow{AB}=\vec{b},\ \overrightarrow{AC}=\vec{c}$のとき，重心Gの位置ベクトル$\overrightarrow{AG}$は，

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

次に内心の位置ベクトル$\overrightarrow{AI}$を求めてみましょう。内心は 3 つの内角の二等分線が交わる点です。△ABCの内接円の中心でもあります(図 3)。





ベクトルを用いて書き直した図が図 4 です。今回も基準となる点をAとした位置ベクトル$\overrightarrow{AB}=\vec{b},\ \overrightarrow{AC}=\vec{c}$　を用いて$\overrightarrow{AI}$を計算してみましょう。
AIの延長と辺BCの交点をDとします。ADは$\angle A$の二等分線であるから，角の二等分線と比より，$BD:DC=\mathrm{AB}:AC=|\vec{b}|:|\vec{c}|$

内分点の位置ベクトルの公式より，$\overrightarrow{AD}=\frac{|\vec{c}|\vec{b}+|\vec{b}|\vec{c}}{|\vec{b}|+|\vec{c}|}$　，$BD=BC\times\frac{|\vec{b}|}{|\vec{b}|+|\vec{c}|}=\frac{|\vec{b}||\vec{c}-\vec{b}|}{|\vec{b}|+|\vec{c}|}$

角の二等分線と比より，$AI:ID=\mathrm{AB}:BD=|\vec{b}|:\frac{|\vec{b}||\vec{c}-\vec{b}|}{|\vec{b}|+|\vec{c}|}=(|\vec{b}|+|\vec{c}|):|\vec{c}-\vec{b}|$

以上より，$\overrightarrow{AI}=\frac{|\vec{b}|+|\vec{c}|}{|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{c}-\vec{b}|}\overrightarrow{AD}=\frac{|\vec{b}|+|\vec{c}|}{|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{c}-\vec{b}|}\cdot\frac{|\vec{c}|\vec{b}+|\vec{b}|\vec{c}}{|\vec{b}|+|\vec{c}|}=\frac{|\vec{c}|\vec{b}+|\vec{b}|\vec{c}}{|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{c}-\vec{b}|}$

まとめると，次のようになります。

△ABCの内心Iの位置ベクトル

△ABC において，$\overrightarrow{AB}=\vec{b},\ \overrightarrow{AC}=\vec{c}$のとき，内心Iの位置ベクトル$\overrightarrow{AI}$は,

$$\overrightarrow{AI}=\frac{|\vec{c}|\vec{b}+|\vec{b}|\vec{c}}{|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{c}-\vec{b}|}$$

やや煩雑な形をしておりますが, $|\vec{c}-\vec{b}|=a$, $|\vec{c}|=b, |\vec{b}|=c$のように辺の長さが具体的に与えられているケースが多いので，その場合は,

$$\overrightarrow{AI}=\frac{b}{a+b+c}\vec{b}+\frac{c}{a+b+c}\vec{c}$$

のようにわかりやすい形になります。

次回は垂心と外心の位置ベクトルを求めてみたいと思います。今回の重心・内心と比べてもかなり複雑な式になりますが，楽しみにしていてください。　(秀)