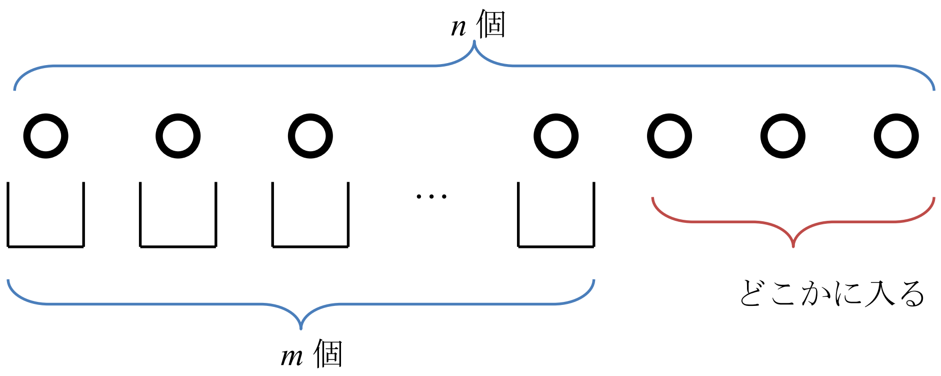
たのしいサイエンス通信

2020年度 2

ディリクレの箱入れ原理

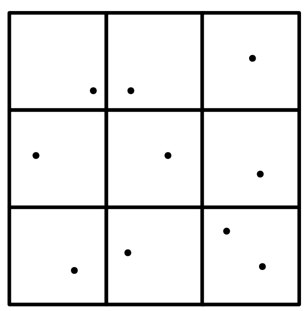
> 問　1辺が3mの正方形がある。ここに10個の点を，どの点も1.5m以上離れるように置くことができないことを証明せよ。

教科書で単元として扱わないのに入試でたまに出てきます。「できないことを証明せよ」という問題は「やってみたけどできませんでした」というのではダメですね。ここで**ディリクレの箱入れ原理**というものを使います。これは**鳩ノ巣原理**とも呼ばれ，m 個の箱に n 個のものを入れるとき，m より n のほうが多いときは必ず少なくとも1つの箱に2つ以上のものが入るというものです。これは考えればわかりますね。



これを利用して先ほどの問を解いてみよう。

この正方形を1辺が1mの9つの正方形に分けてみます。ここに10個の点を打つと，ディリクレの箱入れ原理によりどこかの箱に少なくとも2個の点が入ることになります。一つの小正方形の対角線は$\sqrt{2}(=1.414\cdots)$m なので，この中で2つの点を1.5m空けて打つことはできません。(証明終)



これを応用するとこんなことが言えたりします。

縦 8.4m，横 7m の教室では，31 人以上の生徒が 2m 以上のの間隔を保つことはできない

ソーシャルディスタンスって難しいですね。

あとは直接箱じゃないけどこの考え方を使う例としては次のような問題があります。

ある会合に何人かの参加者がいます。彼らは他の参加者を見つけると名刺交換をします。もちろん同じ人とは 1 回しか名刺交換をしません。誰とも名刺交換をしていない人もいるかもしれません。 参加者のうち，名刺交換をした人数が同じである 2 人が必ずいることを示せ。

これは 1999 年の甲陽学院中学校の入学試験問題（改）です。これは一筋縄にはいきません。事前にいくつかの可能性をつぶした（解決した）後にディリクレの箱入れ原理を使います。こんな問題を小学生が解くのですね。

余談ですが，よく言われる「鳩ノ巣原理」ではなくあえて「ディリクレの箱入れ原理」と書いているのは，私の恩師の『人の名前がついているものはその人に敬意を表して使う』という教えです。「三平方の定理」は「ピタゴラスの定理」。数Ⅲで出てくる「自然対数の底」というものも「ネイピア数」という言いやすい言い方があるのになぜか避けられていますね（オイラーに気兼ねしてるのかな？）。「円周率」もまず「ルドルフ数」と言うことにしています（結局生徒は「？」となるので円周率と言い直すことになるのですが）。　（逸）