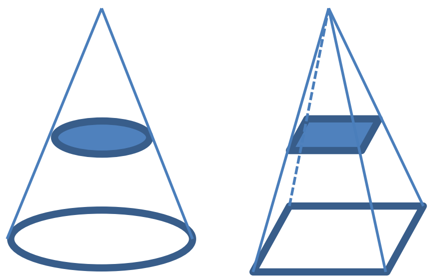
たのしいサイエンス通信

2020 年度

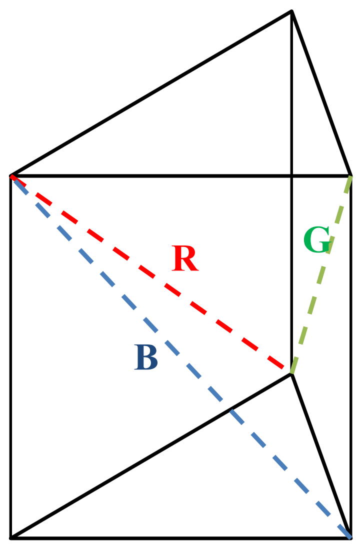
3

カヴァリエリの原理

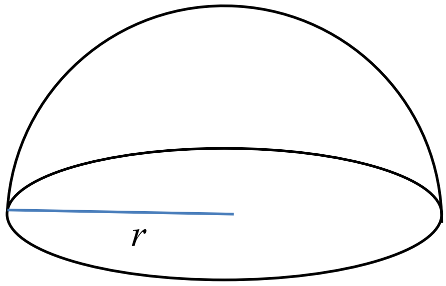
今まで「なぜそうなるか」がわからないまま教えてもらったことっていくつかあります。例えば円錐の体積ってなぜ円柱の 1/3 なのか，球の体積ってなぜ$\frac{4}{3}\pi r^3$なのかなどですね。このあたりは高校数学で微分積分を扱うと納得できることになりますが，小中学校じゃその話は無理ですね。



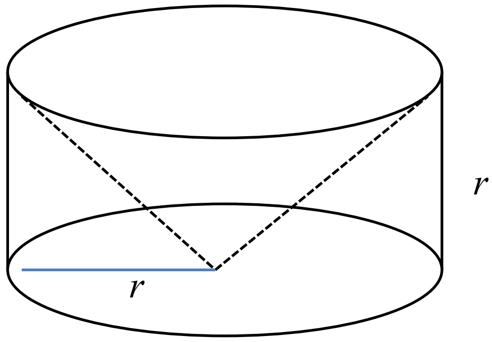
そこで**カヴァリエリの原理**の紹介です。雑な紹介ですが，「２つの立体があり，それを水平にある高さでスライスして，どの断面も面積が等しければそれらの体積は等しい」というものです。厳密にはいろいろあるかとはありますが，直感的にはわかりやすいです。これは高さと面積が比例していれば底面積の等しい錐体の体積は等しいということになりますので，ある一つの例が示せれば一般の錐体でも言えますね。右の図の三角柱を RB の点線を含む平面と RG の点線を含む平面で切れば３等分になります。



また，カヴァリエリの原理を利用することにより球の体積を求めることができます（三平方の定理を使うので中学３年生からなら理解できるかな)。

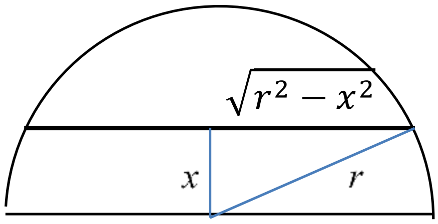


A

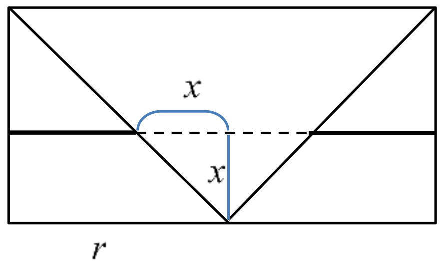


B

半径 r の半球 A と，「半径 r の円を底面とする高さ r の円柱からその上面を底面とする高さ r の円錐を取り除いたもの」B を比べます。これを下から x のところで切った切り口の面積を比べます。



A



B

A の断面の半径は$\sqrt{r^2 - x^2}$なので断面積は$\pi(r^2 - x^2)$。B の断面の面積は５円玉のように穴の開いた円になり，外の円はπr^2で穴のお大きさはπx^2だから切り口の面積は$\pi r^2 - \pi x^2 = \pi(r^2 - x^2)$。等しいですね。B の体積は円柱の体積から円錐の体積を引いたものだから$\pi r^2 \times r - \frac{1}{3}\pi r^2 \times r = \frac{2}{3}\pi r^3$。これが半球 A の体積になるので，球全体はこの２倍だから$\frac{4}{3}\pi r^3$となります。

ちなみにこれの平面版の応用として円の面積がπr^2ということもできます。(逸)