たのしい
サイエンス通信
2020 年度
4

10 人でじゃんけん

とあるテレビ番組で，10 人でじゃんけんをしているのを見ました。「案の定時間がかかっていたな」,「でも意外と思ったよりはすぐに決まったな」という相反する 2 つの感想を持ってしまったのでとりあえず計算してみようと思いました。10 人でじゃんけんをして最初の勝敗が決まるまで何回かかるかの期待値を考えます。

一気に 10 人の確率なんて求めるのは疲れるし，10 人以外のときにも応用が利きにくいので，n 人としておいて**漸化式**で解いてみます。高校数学Ｂの範囲ですね。漸化式というのは n 番目の項をひとつ前（$(n$-1)番目）（これより前を含むこともある）の項をある規則で計算して得られるという式です。1 番目がわかっていたら２番目がわかり，そこから３番目がわかり…という感じで数列ができます。

n 人$(n \geq 2)$でじゃんけんをしたときに，勝敗が決まる確率を p_n，全員で３種類の手を出してあいこになる（仮に Q あいこと名付けます）確率を q_n，全員が同じ手を出してあいこになる確率（R あいこと名付けます）を r_n とします。
$p_n + q_n + r_n = 1$。樹形図などを書けばわかりやすいのですが，2 人のときを考えると$p_2 = \frac{2}{3}$, $q_2 = 0$, $r_2 = \frac{1}{3}$ です。

さて，n 人の結果にＡさん１人増やして勝負がどうなるかを考えましょう。

- n 人で勝負が決まっているとき
  A さんが n 人の出した手を出せば勝敗の中に入ることができ，異なる手を出せば Q あいことなります。
- n 人が Q あいこだったとき
  A さんが何を出しても Q あいこになります。

- n 人が R あいこだったとき

  A さんが n 人と同じ手を出したら R あいことなり，異なる手を出したら勝負が決まります。

これらより，

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{2}{3}r_n\,, \qquad q_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + q_n\,, \qquad r_{n+1} = \frac{1}{3}r_n$$

という漸化式が作成でき，これを解くと

$$p_n = \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}\,, \qquad q_n = 1 - \frac{2^n - 1}{3^{n-1}}\,, \qquad r_n = \frac{1}{3^{n-1}}$$

となります。

あとは電卓を叩くだけ。一度の 10 人じゃんけんで勝敗が決まるのは約 5.2%。もっと低いかと思っていたけれどこんなものだったのね。また最初の勝敗が決まるまでには平均 19.26 回（5.2%の逆数になります）。テレビではもう少し短かったのは運がよかったのかな。ちなみに 3 人ならば平均 1.5 回で決まります。5 人ならば 2.7 回。でもこれは指数関数なのでこのあたりから飛躍的に回数が多くなります。

多人数じゃんけんはあいこが多くなかなか決まりにくいのですが，それを解決する画期的な方法が 2014 年度の広島大学の入試問題に出ました。そこに出てきたルールを記します。広まればかなり有効な手段だと思うのですが。　（逸）

(i)　グー，チョキ，パーのうち 1 種類または 2 種類の手が出たときには通常のルールに従う。

(ii)　グー，チョキ，パーすべての手が出たときには，出した手によってグループに分け，次のように決める。

- (a)　もっとも人数の少ないグループが 1 組の場合にはそのグループを勝者とする。
- (b)　もっとも人数の少ないグループが 2 組できた場合には，じゃんけんで勝つ方の手を出したグループを勝者とする。
- (c)　3 グループとも同じ人数の場合には，あいことする。