たのしいサイエンス通信
2020 年度
9

すべて揃えるには何個買うの？

トレーディングカード等, 開けてみるまで何が入っているかわからないものを買う場合，もちろん欲しいものが必ず出てくるわけではありません。特にコレクションの性質をもつものがあれば，やはり全種類集めたい。最初の方はうまく集まるのだが，あと 1 つ 2 つがなかなか出てこないということはありますよね。

例として１つ買うと８種類の絵柄のうち１つが出てくる。これを８つそろえるのにいくつ買えばいいでしょうか。８つ買えばいい？運が良ければ全種類当たる？ではその確率を計算してみましょうか。

１つ目はまあ何が当たっても初めてですね。２つ目は 1/8 の確率で１つ目と同じものが当たります。逆に言えば 7/8 の確率で異なるものが当たりますね。３つ目ならば１つ目と２つ目以外の６つのうちどれかが当たればいいから 6/8, …, 最後の１つは８種類のうちからその一つを当てないといけないので 1/8。したがって８つ買って８種類揃う確率は

$$1\times\frac{7}{8}\times\frac{6}{8}\times\frac{5}{8}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{8}\times\frac{1}{8}=\frac{315}{131072}=0.00240\cdots$$

0.24%…。まず揃わないと考えた方がいいですね。

では８種類そろえるには平均何個買えばいいかを考えましょう。数学的に言えますが，とりあえず直感的に考えます。1/2 で当たるものは２つ買えば「平均」１つ当たると考えられます。一般に確率の逆数が平均となります。すると，最初は１つ買えば初めてのものが出るのですが，２つ目は初めのものと重ならない確率が$\frac{7}{8}$，すなわち次に異なるものが出るために買わなければいけない数は平均$\frac{8}{7}$個となります。同様に$\frac{8}{6}$個，$\frac{8}{5}$個…となり，８種全部そろえるのには

$$1+\frac{8}{7}+\frac{8}{6}+\frac{8}{5}+\frac{8}{4}+\frac{8}{3}+\frac{8}{2}+\frac{8}{1}=\frac{761}{35}=21.74\cdots$$

となり，平均 22 個くらい買わないといけないという結果が出てきます。

もちろんこれも「平均」であり，22 個買ったからすべて当たるわけでもありません。極端な話，100 個買っても揃わないこともあるでしょう。

１個 1 個買っていくのもいいのですが，ここは一気に「大人買い」してみましょう。一般的に n 個買って m 種類すべてが揃っている確率は

$$\sum_{k=1}^{m} {}_m\mathrm{C}_k \left(\frac{k}{m}\right)^n (-1)^{m-k}$$

となります。１ダース（12 個）買って 8 個揃っている確率は

$$\sum_{k=1}^{8} {}_8\mathrm{C}_k \left(\frac{k}{8}\right)^{12} (-1)^{8-k}=0.0933\cdots$$

１ダースじゃ 9%くらいですね。平均で 22 個で揃うらしいので２ダース買ってみましょうか。

$$\sum_{k=1}^{8} {}_8\mathrm{C}_k \left(\frac{k}{8}\right)^{24} (-1)^{8-k}=0.7028\cdots$$

70%くらいの確率で全種類集まります。この数字を高いとみるか安いとみるか。なお，95%の確率で全種類揃う確率は 38 個買うときです。

さて，上のデータで 70%の確率で 8 個全部そろえるのに 24 個必要と見えますが，3 倍買えば 70%？試しに全 12 種揃えるのに 36 個買ってみると 0.5629…となり，思ったほど上がりません。揃えなければいけない種類が多いほど難易度は上がっていきます。

スマホゲームが流行していますが,「ガチャ」と呼ばれるこのようなくじ引き，揃えようと思うととんでもない料金がかかるかもしれません。くれぐれも気を付けてください。　（逸）