たのしいサイエンス通信

2021 年度 3

大きな数

5 という数字を 2 つ使って大きな数を作りましょう。$5+5=10$，いやいや，$5\times5=25$。いや，２つ並べて 55 の方が大きいですね。ちょっと気が利く人なら 5^5 というのを考えますね。これは何と 3,125 になります。

また補助的な記号を用いると，それで大きな数を表すことができます。例えば高校で！を記号とする階乗というものを学びます。

$$10! = 10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 3628800$$

と，10 という数字からこれだけ大きい数が表現できます。

実際に少ない数字でどれだけ大きな数が表せるでしょうか。階乗を超える強者は現れるでしょうか。

３を３つ使ってみましょう。大きな数を作ろうと思えば累乗の形が大きくなりそうですよね。そこで 3^{3^3} のように指数が累乗の形になるようにするといいですね。実際この値は 7,625,597,484,987 と，13 桁の数になります。このようにして３を４つ，５つと指数をつなげていくようにすればとんでもなく大きな数を表せます。そこで累乗に新たな記号を設定しましょう。クヌースの矢印表記というものですが，まず

$$x\uparrow y = x^y$$

とします。そして矢印の数を増やして次のようにします。

$$x\uparrow\uparrow y = \underbrace{x\uparrow x\uparrow\cdots\uparrow x}_{y} = x^{x^{\cdots}}$$

$$x\uparrow\uparrow\uparrow y = \underbrace{x\uparrow\uparrow x\uparrow\uparrow\cdots\uparrow\uparrow x}_{y}$$

例えば$3\uparrow 3 = 3^3 = 27$,$3\uparrow\uparrow 3 = 3\uparrow 3\uparrow 3 = 3^{27} = 7625597484987$,

$$3\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3\uparrow\uparrow 3\uparrow\uparrow 3 = 3\uparrow\uparrow 7625597484987$$
$$= 3\uparrow 3\uparrow\cdots\uparrow 3(7625597484987\text{ 回})$$
$$= 3^{3^{\cdots}}(7625597484987\text{ 回})$$

さすがに↑3 本でもう計算するのが嫌になった。嫌というかもう計算不能。この段階でスパコンですら計算できず，宇宙に存在する素粒子すべての数よりもはるかに大きい数です。この先は矢印をたくさん書くことになるので，矢印の数を n としたものを$3\uparrow^n 3$ と表し，これを$G(n)$とすることとします。さらに$G^2(n) = G(G(n)), G^3(n) = G\left(G(G(n))\right)$,… とします。

このようにして n や G の上の数を大きくすればいくらでも大きい数になりますが，今$G^{64}(4)$というものを考えます。$G(3)$も無理なのにそれ以上のものなんてとても計算できませんが（計算できないどころかわかるように計算式を書くだけでも無理），実はこの数は**グラハム数**と呼ばれ，数学の証明で使われた意味のある数値として最も大きな数としてギネスブックに認定されています。

たのしいサイエンス通信で 4 年前に紹介したラムゼー問題のひとつであり，1970 年にロナルド・グラハムとブルース・リー・ロスチャイルドにより提唱された，「n 次元超立方体の 2^n 個の頂点のそれぞれを互いに全て線で結ぶ。次に 2 つの色を用いて連結した線をいずれかの色に塗り分ける。このとき n が十分大きければ、どんな塗り方をしても、同一平面上にある四点でそれらを結ぶ線が全て同一の色であるものが存在する」といった極めてシンプル（？）な定理があります。グラハムの定理と呼ばれるこの定理ですが，この「十分大きい数」とは何より大きい数なのかというところで出てきた数がこのグラハム数です。研究が進んでこの数は少しずつ小さいものが見つかっておりますが，これが下限だという値は未だ見つかっていない未解決問題です。　（逸）