たのしいサイエンス通信

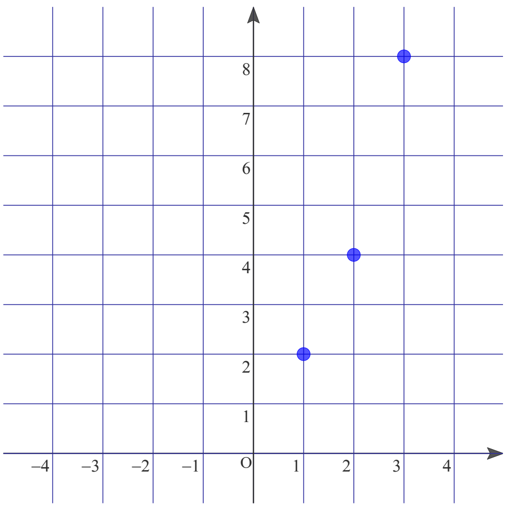
2021年度

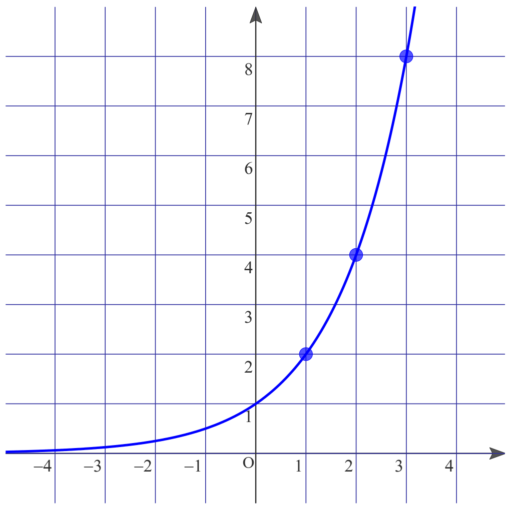
8

つなげてつなげて

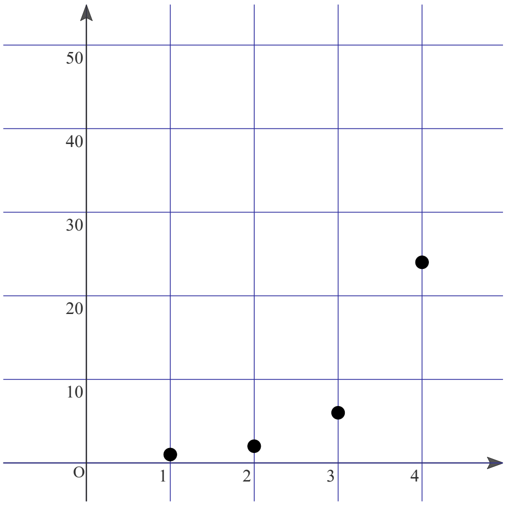
小学校に入りたての頃はコップ１杯，コップ２杯，…と数えていた量に，いつから「コップ半分」などという分数にまで概念を広げていきましたね。また，中学３年になると「２乗して２になる数」という，今まで知っている数で表せない数が出てきて，これ（の片方）を$\sqrt{2}$とわざわざ記号を作って表しました。このように，1,2,3,…のような飛び飛びの数から実数の連続した数でいろいろ考えることができるようになったわけです。

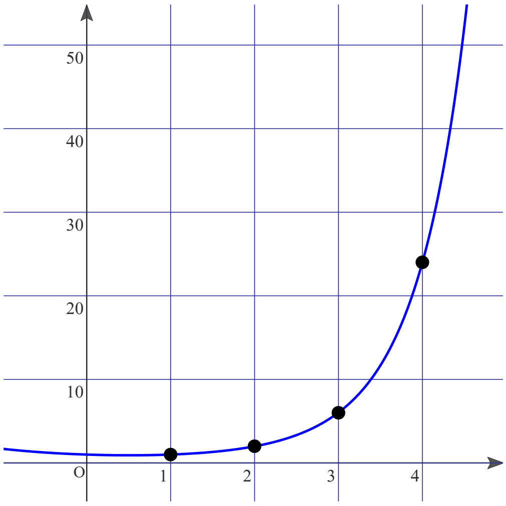
高校２年生になると，自然数だけで考えられてきた指数を実数にまで拡張しました。今までは点でしかなかったのが 2^{-3} や $2^{\frac{1}{2}}$ のような数が作られ，滑らかにつながりました。





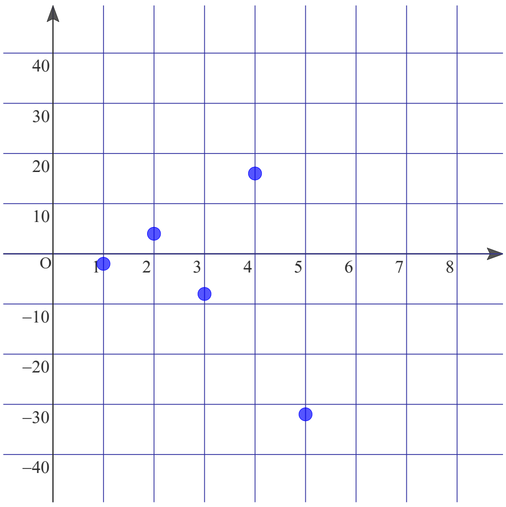
さて，高校になると「階乗」というものがでてきます。数を減らしながら１までかけるものです（例：$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$）。これも$1! = 1, 2! = 2$, $3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, \cdots$という風に飛び飛びになっていますが。これを連続させるために $f(x) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt$ という積分を用いた関数を用います（ガンマ関数という関数を少しずらしたもの）。

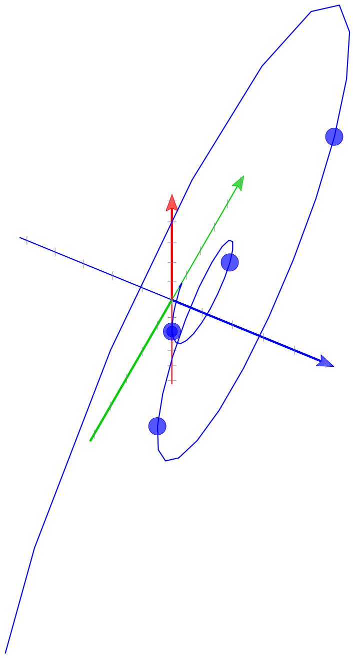




これで 3.5!のような数も作られて滑らかにつながりました。

先ほどの$y = 2^x$で，$y = (-2)^x$としてみます。x が自然数で点を打つと上に行ったりしたに行ったりで，きれいで滑らかな曲線で繋がりそうにありません。そこで視点を広げてみて，立体的に見てやると，次のようならせんが見えてきませんか？





これは虚数と呼ばれるものを使って$(-2)^x = 2^x(\cos \pi x + i \sin \pi x)$と表したものです。数の世界を「拡張」すると，見えない規則性が見えてきますね。（逸）