たのしいサイエンス通信
2021 年度
10

不定積分$\int \cos^5 x\, dx$から学ぶ

読者の皆さま，こんにちは。すっかり寒くなってきましたね。３年生は卒業式まで登校日は２０日程しかありません。残りわずかの高校生活を悔いの残らないように過ごしましょう。

さて，今回は数学Ⅲの話題です。先日，教材研究をしていると，教科書の章末問題で面白い不定積分に出会いました。

不定積分$\int \cos^5 x\, dx$を求めよ。

まずは少しお考えください。初見だと結構難しい問題と思います。しかし，この問題の解答は少なくとも４通りはあり，どの解法もとても参考になるので，ここで紹介したいと思います。

（解１）
$$\begin{aligned}\int \cos^5 x\, dx &= \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x\, dx = \int (1-2\sin^2 x+\sin^4 x)\cos x\, dx\\ &= \int \cos x\, dx - 2\int (\sin x)' \sin^2 x\, dx + \int (\sin x)' \sin^4 x\, dx\\ &= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C\end{aligned}$$

コメント：公式$\int f'(x)\{f(x)\}^n\, dx = \frac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1} + C$（ただし，$n \neq -1$）を知っていて，$\int \cos^3 x\, dx$を計算したことがある人には真っ先に思いつく解答だと思います。

（解２）$\cos^5 x = (1-\sin^2 x)^2 \cos x$

$\sin x = t$　とおくと　$\cos x\, dx = dt$

よって，
$$\begin{aligned}\int \cos^5 x\, dx &= \int (1-t^2)^2\, dt = \int (1-2t^2+t^4)\, dt\\ &= t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C\end{aligned}$$

コメント：置換積分$\int f(g(x))g'(x)\, dx = \int f(u)\, du$　（ただし，$g(x) = u$　）を利用しています。この解法で授業を進めるのが普通でしょうか。本質的には（解１）と同じです。

（解３）$\cos^4 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right)$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$ より，

$$\cos^5 x = \frac{3}{8}\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x \cos x + \frac{1}{8}\cos 4x \cos x$$
$$= \frac{3}{8}\cos x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x) + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}(\cos 5x + \cos 3x)$$
$$= \frac{5}{8}\cos x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{1}{16}\cos 5x$$

よって，$\int \cos^5 x\, dx = \int \left(\frac{5}{8}\cos x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{1}{16}\cos 5x\right) dx$

$$= \frac{5}{8}\sin x + \frac{5}{48}\sin 3x + \frac{1}{80}\sin 5x + C$$ ・・・Ⓐ

コメント：半角の公式　$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$　と

積和の公式　$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\}$　を利用しています。分数の計算や半角の公式を２度，積和の公式は苦手な人が多いので，なかなか思いつきにくい解答だと思います。

ここでⒶの式に違和感を覚えた人はなかなか鋭いです。最後の答えが（解１），（解２）と異なっていますね。今からこの違いについて解き明かしてみましょう。結論を先に申しますと，実は，見掛けが異なるだけで同じ結果になっています。以下のsinに関する３倍角と５倍角の公式をⒶに代入してみましょう。※５倍角の公式は一般的には知られていないので，加法定理を利用して自作してください。

３倍角と５倍角の公式

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$
$$\sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x$$

すると，

Ⓐ$= \frac{5}{8}\sin x + \frac{5}{48}\sin 3x + \frac{1}{80}\sin 5x + C$
$$= \frac{5}{8}\sin x + \frac{5}{48}(3\sin x - 4\sin^3 x) + \frac{1}{80}(16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x) + C$$
$$= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

となり，結果は見事に一致します。

他にも，定期テストで生徒が発見した方法ですが，$I_n = \int \cos^n x\, dx$と置いて，I_nとI_{n-2}に関する漸化式を立てて導く方法もあります。このように，積分はとても奥が深いので，他にも解法が無いか是非研究してください。（秀）