たのしいサイエンス通信
2021年度
11

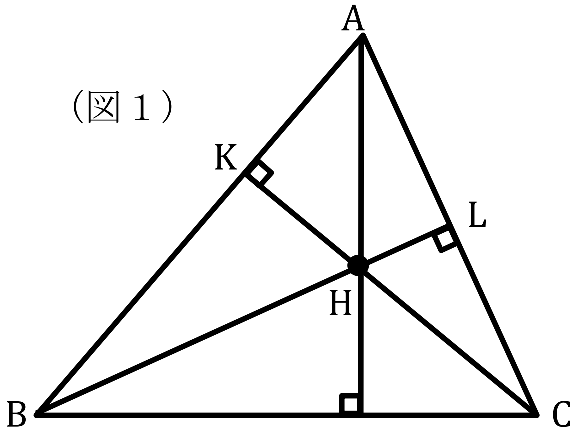
三角形の五心の位置ベクトル　第２回

読者の皆さま，こんにちは。今年もたのしいサイエンス通信を宜しくお願いいたします。今回は，三角形の五心の位置ベクトルの２回目として，垂心の位置ベクトルを計算してみようと思います。

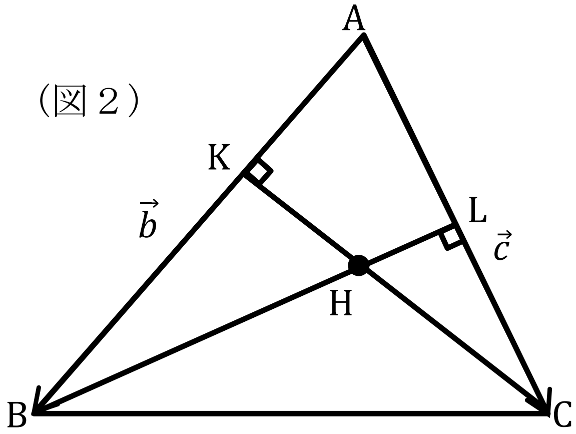
図１は三角形△ABCと垂心Hです。垂心とは，三角形の３つの頂点から向かい合う辺に下した垂線が交わる点です。この３本の垂線が１点で交わることはよく知られていますので，ここでは２本の垂線BLとCKの交点で考えます。また，垂心は三角形の形状によっては△ABCの内部に存在しないケースもありますが，ここでは△ABCの内部に存在する場合で考えます。

ベクトルを用いて書き直した図が図２です。今回も基準となる点をAとした位置ベクトル$\overrightarrow{AB}=\vec{b},\ \overrightarrow{AC}=\vec{c}$　を用いて$\overrightarrow{AH}$を計算してみましょう。

（図１）



（図２）



$\overrightarrow{AK}=k\vec{b}$とおくと，$\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AC}=k\vec{b}-\vec{c}$

$CK\perp AB$より，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CK}=0$　　　$\vec{b}\cdot\left(k\vec{b}-\vec{c}\right)=0$

$k\left|\vec{b}\right|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$　　　$k=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|^2}$　・・・①

次に，

$\overrightarrow{AL}=m\vec{c}$とおくと，同様にして，　$m=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}$　・・・②

BH：HL $= s : (1-s)$とすると，

$$\overrightarrow{AH} = (1-s)\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AL} = (1-s)\vec{b} + ms\vec{c} = \frac{1-s}{k}\overrightarrow{AK} + ms\overrightarrow{AC}$$

HはCK上の点より，

$$\frac{1-s}{k} + ms = 1 \qquad \therefore s = \frac{k-1}{km-1}$$

以上より，$\overrightarrow{AH} = (1-s)\overrightarrow{AB} + ms\overrightarrow{AC} = \frac{k(m-1)}{km-1}\vec{b} + \frac{m(k-1)}{km-1}\vec{c}$

$$= \frac{k(m-1)\vec{b} + m(k-1)\vec{c}}{km-1} = \frac{\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|^2}\left(\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}-1\right)\vec{b} + \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}\left(\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|^2}-1\right)\vec{c}}{\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|^2}\times\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}-1}$$

（①②を代入した）

$$= \frac{\left\{\frac{(\vec{b}\cdot\vec{c})^2 - |\vec{c}|^2\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2}\right\}\vec{b} + \left\{\frac{(\vec{b}\cdot\vec{c})^2 - |\vec{b}|^2\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2}\right\}\vec{c}}{\frac{(\vec{b}\cdot\vec{c})^2 - |\vec{b}|^2|\vec{c}|^2}{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2}}$$

$$= \frac{\left\{(\vec{b}\cdot\vec{c})^2 - |\vec{c}|^2\vec{b}\cdot\vec{c}\right\}\vec{b} + \left\{(\vec{b}\cdot\vec{c})^2 - |\vec{b}|^2\vec{b}\cdot\vec{c}\right\}\vec{c}}{(\vec{b}\cdot\vec{c})^2 - |\vec{b}|^2|\vec{c}|^2}$$

途中の計算は，ぎりぎりまでkとmのまま処理することがポイントです。また，この式は$\vec{b}\cdot\vec{c} = 0$すなわち，Hが点Aと一致する場合でも成り立ちます。

まとめると，次のようになります。

<u>△ABCの垂心Hの位置ベクトル</u>

△ABCにおいて，$\overrightarrow{AB} = \vec{b},\ \overrightarrow{AC} = \vec{c}$のとき，垂心Hの位置ベクトル$\overrightarrow{AH}$は，

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\left\{(\vec{b}\cdot\vec{c})^2 - |\vec{c}|^2\vec{b}\cdot\vec{c}\right\}\vec{b} + \left\{(\vec{b}\cdot\vec{c})^2 - |\vec{b}|^2\vec{b}\cdot\vec{c}\right\}\vec{c}}{(\vec{b}\cdot\vec{c})^2 - |\vec{b}|^2|\vec{c}|^2}$$

前回紹介した重心，内心の位置ベクトルと比べるとさらに煩雑な形をしておりますね。よく見ると$\vec{b}$と$\vec{c}$の係数はほぼシンメトリーになっているのが面白いと思います。ただ，この公式を知らないと問題が解けないわけではないので，暗記する必要はありません。

次回は外心の位置ベクトルを求めてみたいと思います。今回は相当な式計算になりましたが，外心はさらに複雑な計算が必要になります。また，数学Aで学習する図形の性質を深く理解しておく必要もありますので，大変勉強になると思います。（秀）