たのしい
サイエンス通信

2022 年度

9

15 パズルと不変量

15 パズルというものをご存じでしょうか。４×４の枠の中に 1～15 の数が書かれたパネル（絵のこともある）を動かして順番どおりに並べるというものです。これは一回バラして適当に組んでも元に戻すことはできるのでしょうか。答えはそうとは限らない，例えば完成形（図 A）から 14 と 15 を入れ替えたもの(図 B)は絶対に完成形になりません。

なぜそう言い切れるか。やってみたけどできなかったから不可能です？そんなのは通用しません。自分の力が及ばなかっただけで解法があるかもしれないじゃないですか。

完成形を例に，4×4 の正方形を一列に
A=(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16)
と表すことにします(空白は「16」で表した)。今，完成形から 12 のパネルを下にスライドしました（図 C)。
C=(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 16, 13, 14, 15, 12)
これを完成形にするには 12 と 16 を入れ替えればいいですね。数字の位置を入れ替えることを**互換**といいます。C から A へは（逆も然り）１回の互換で移ります。そして空白「16」の位置ですが，一つ移動しました。図 A では４行目の４列目にありますが，図 C では３行目の４列目にあります。この m 行目の n 列目について，Q=m+n の値を考えます。すると，縦移動横移動関係なく１回の移動について Q の偶奇が変わります。

列→

行
↓

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

図 A（完成形）

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	16

図 B

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	16
13	14	15	12

図 C

　ということは何回移動しても移動（互換）の回数 P と 16 の位置から得られる数 Q 和の偶奇は変わらないのです。今回は完成形では P=0，Q=4+4=8 なのでその和は偶数，すなわちどのように移動させてもこの値は偶数のままであり，奇数の状態から偶数になることはありません。

　ここで図 B を見てみましょう。B=(1,2,3,…,13,15,14,16)。これを完成形にするには互換 14↔15 の 1 回（P=1）。Q=8 なのでその和は奇数。したがってこれは完成形には絶対にならないことが分かります。

　それでは図 D が完成形に戻るかを考えてみましょう。
D=(1,2,3,4,12,13,14,5,11,16,15,6,10,9,8,7)
これを A にするためには互換（a と b の互換を(a,b)と表す）
(5,12)(6,13)(7,14)(8,12)(9,11)(10,16)
(11,15)(12,13)(13,16)(14,15)(15,16)
の 11 回必要であり(P=11)，Q=3+2=5 なので P と Q の和は偶数になります。

1	2	3	4
12	13	14	5
11	16	15	6
10	9	8	7

図 D

　偶奇が異なれば元に戻らないということは言えますが，偶奇が等しければ元に戻るということは必ずしも言えることではないのですが，今回は確固たるアルゴリズムがあり，それに沿って移動させれば元に戻るということが確認されています。

　このように，ある作業によって変わらないもの（今回は P+R の偶奇）のことを**不変量**といいます。もちろん P+Q の値が整数であるというのは不変量ではあるものの，このことに意味はありません。不変量が等しいからといって同じものだと言い切ることができないケースもあります（それでもある性質を満たすという重要なものではあるが）。物事をしっかり区別をつけるためにより良い不変量を見つけることも数学においては大事な作業です。

　これの複雑なものとしてルービック＝キューブがあります，これも一度解体してから適当に組むと元に戻らないという経験はあると思います，ルービック＝キューブにも回転させても変わらない不変量というものがあり，その不変量によっていくつかのパターンに分類することができます。何かで読んだのだけど忘れてしまいました。6 パターンだったか 12 パターンだったか…。　（逸）