

継ぎ足しのタレと数学

和食店などでよく「創業時からタレを継ぎ足しながら使っている」などとなっていて老舗感をアピールしているところがあるそうです（不幸にも私は見たことはありませんが）。これの数学的要素について今更語りつくされてはいるネタですが、一度取り扱ってみたいと思います。

よく使われている設定で今から最初のタレを作りましょう。100kg 用意しましょうかね。ここから仮に1日1kg(1%)のタレを使用し、この減った分を新たに作って継ぎ足します。1日後には最初のタレは99kg 残っています。継ぎ足そうが元のタレは99kgです。そこからこの日1% (99kgの1%は0.99kg) なくなるので2日後には元のタレは98.01kg 残ります。このように、元のタレは1日に0.99倍になっていくので、10日後には 0.99^{10} =約0.904倍、30日後には 0.99^{30} で約0.74倍になります。1年(365日)後には 0.99^{365} で2.55%くらい。ほとんど残っていないといってもいいくらいですね。10年後を計算したら0.0000000000000000118%。老舗感まではいきそうにもありません。



でも問題はそこなのか？10年前のタレがほとんどなくなっているが、じゃあ9年前のタレがあることに意味がないのか？ということで、残っているタレの「平均の年数」で見てみましょう。

全体のタレの量を1とし、1日1%使って継ぎ足すという設定で例えば2日後を見てみましょう。2日後は最初のタレは $0.99^2=0.9801$ 残っています。1日後に継ぎ足したタレは $0.01 \times 0.99=0.0099$, 2日後に継ぎ足したタレは0.01 あります。今日足したタレが0.01, 1日前のタレが0.0099, 2日前のタレが0.9801 と考え

て、平均何日前かを計算すると

$$0 \times 0.01 + 1 \times 0.0099 + 2 \times 0.9801 = 1.9701 \text{ (日前)}$$

となります。これが2日前から始めた店のタレの平均の日数です。

この調子で計算してみましょう。 n 日前のタレは 0.99^n だけ残っています。 $(n-1)$ 日前のタレは $0.01 \times 0.99^{n-1}$, $(n-2)$ 日前のタレは $0.01 \times 0.99^{n-2}$, ..., 2 日前のタレは 0.01×0.99^2 , 1 日前のタレは 0.01×0.99 , 当日入れるタレは 0.01 ですので, n 日後の平均の「タレの歴史」を H_n とすると

$$\begin{aligned} H_n &= n \times 0.99^n \\ &+ \{(n-1) \times 0.01 \times 0.99^{n-1} + (n-2) \times 0.01 \times 0.99^{n-2} + \dots \\ &+ 2 \times 0.01 \times 0.99^2 + 1 \times 0.01 \times 0.99 + 0 \times 0.01\} = 99(1 - 0.99^n) \end{aligned}$$

となります。

これで 10 日後を計算してみると $H_{10} = 99(1 - 0.99^{10}) \approx 9.466$ となります。結構歴史あるタレじゃないですか！ちなみに 1 年後 (365 日後) だと $H_{365} = 99(1 - 0.99^{365}) \approx 96.474$ 日, まあ元の式を見ると n が限りなく大きくなると H_n は限りなく 99 に近づいていきますので, どれだけ歴史があろうとも平均 99 日の歴史があるタレをいただくことになるのですね。

一般的に割合として 1 日に p 残るとして計算すると, $H_n = \frac{p}{1-p}(1 - p^n)$ となり

ますので, n が限りなく大きくなると H_n は限りなく $\frac{p}{1-p}$ に近づきます。例えば 1

日に 0.5% 使う (0.995 だけ残る) として計算すると, タレの歴史は平均 199 日となります。継ぎ足しのタレの歴史はそこそこの歴史があれば, 創業からの年数じゃなく使う割合に依存するということが分かってしまいます。

このタレについての考察は他にもされている方がおられまして, 面白かったのがタレの味のばらつきを抑えるという視点で見たものがありました。興味があれば以下のサイトをご覧ください。 (逸)

参考: keisuke のブログ (継ぎ足しのタレは数学的に意味がある)

<https://kaisk.hatenadiary.com/entry/2014/07/13/152651>