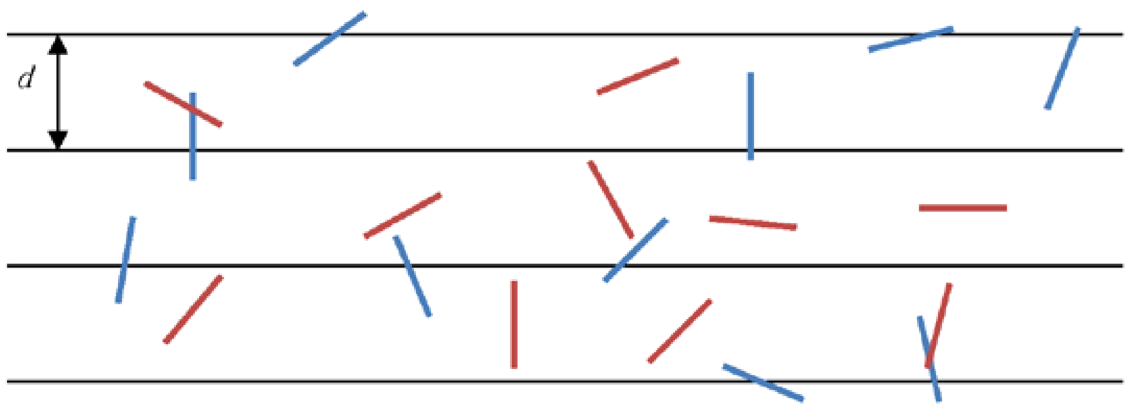
たのしいサイエンス通信
2023 年度
10

ビュフォンの針

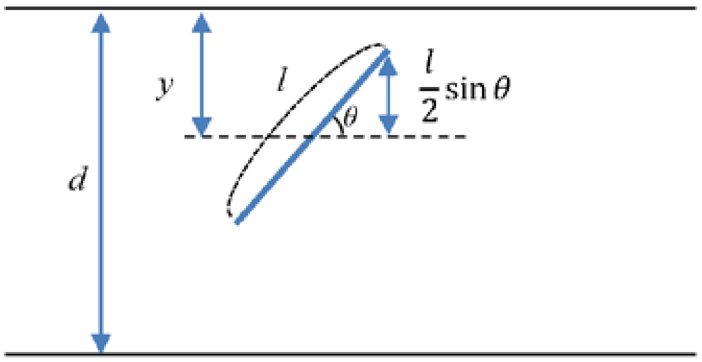
円周率って不思議のなのですよね。数学も思いもよらないところに π が出てきます。その一つとしてビュフォンの針を紹介します。

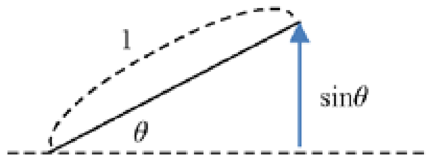
床に間隔 d の平行線を多数引いて、そこに d 以下の長さ l の針を落としたとき、針が線と交わる確率は $\dfrac{2l}{\pi d}$ となる。



証明はそこまで難しくありません。使うのは数学Ⅲの積分の、ほんの基本的なことだけです。

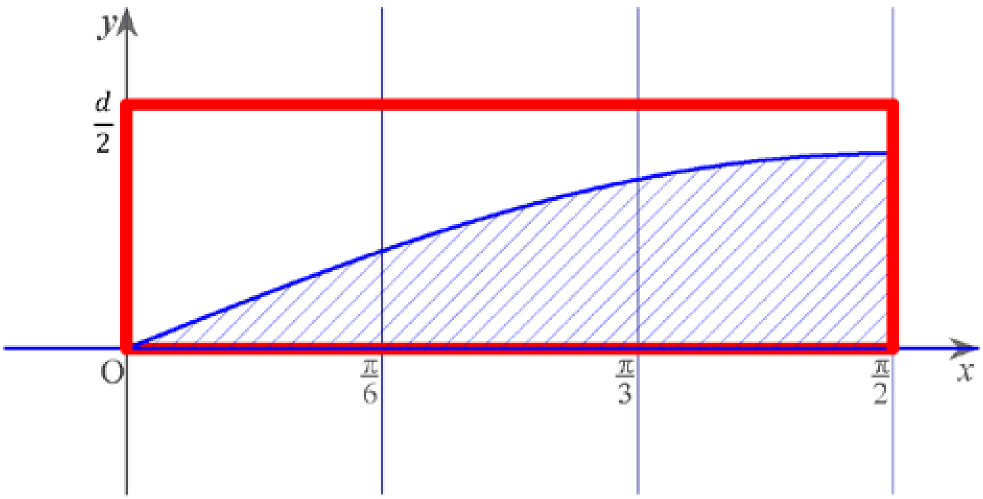
針の平行線からの角度を θ、針の中心と平行線との距離を y とします。針を落とした落としたときにこの θ は0°から90°までの間、y は 0 から $\frac{d}{2}$ までの間で一様に分布します。針の端が針の中心から平行線と垂直方向に$\frac{l}{2}\sin\theta$だけ離れます。





sinθ とは角 θ で斜めに 1 進んだときどれだけ上がったかを表す数

これが y 以上になれば交わるということになりますので、 0°から90°までの間（数学では弧度法で$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$と表します）で$y\leq\frac{l}{2}\sin\theta$となる部分（下の図の斜線部分）となります。



この図で長方形の面積は $\frac{d}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi d}{4}$ 、斜線部分の面積は $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{l}{2}\sin x\,dx=\frac{l}{2}$ となります。斜線部分の長方形に対する割合は $\frac{l}{2}\div\frac{\pi d}{4}=\frac{2l}{\pi d}$ となり、これが交わる確率になります。

例えば平行線の間隔の半分長さの針を用意すれば交わる確率は $\frac{1}{\pi}$ です。針をたくさん落とすことによってその割合を求め、その逆数を取ると π の近似値が得られます。

過去の記事は
こちらから