たのしいサイエンス通信

2024 年度

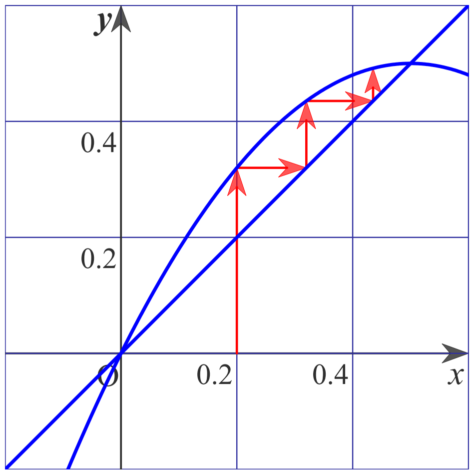
2

ロジスティック写像とカオス

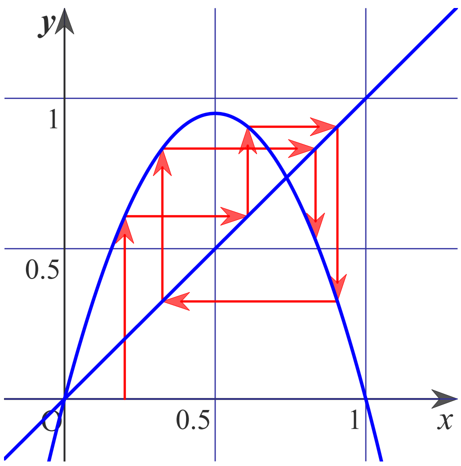
　前回ロジスティック方程式について書きましたが、マルサスモデルの離散型（数列的な表現）の表記が次式です。

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

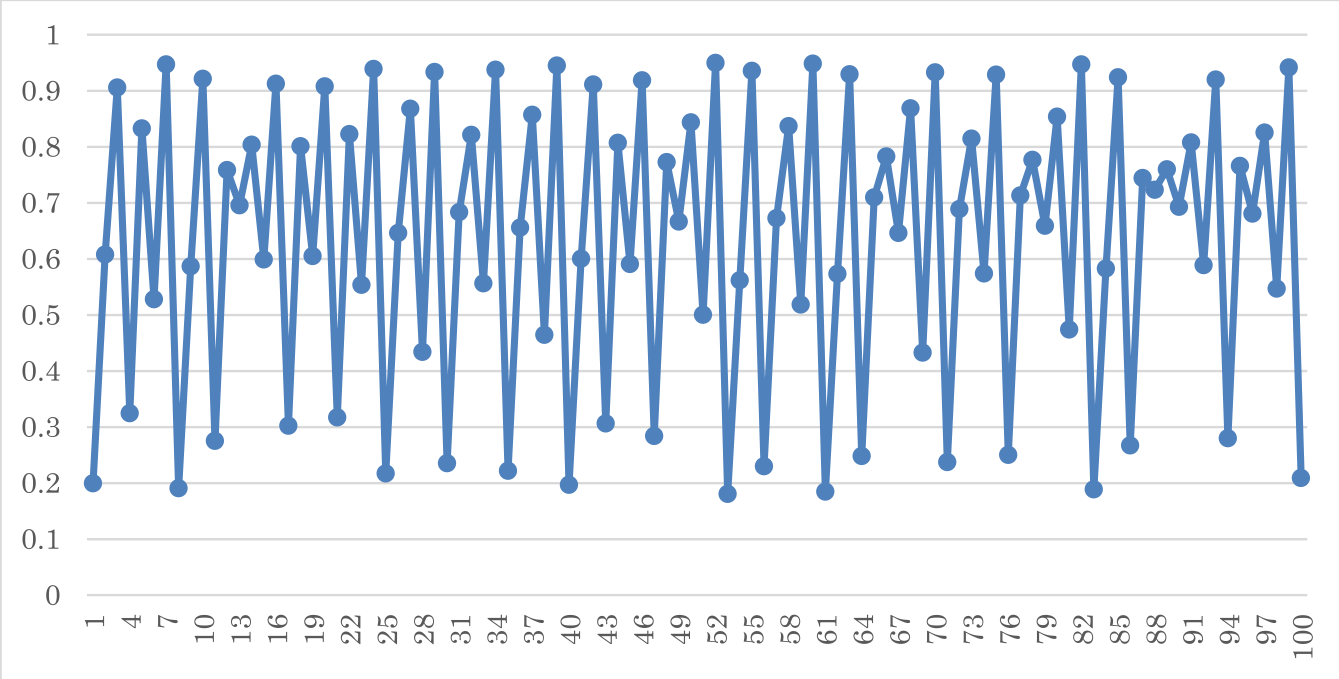
x_i は i 世代の個体数を表します。この離散型の表記は**漸化式**もと呼ばれ、今の世代（n 世代）の次の世代（(n+1)世代）の個体数は今の世代によって定まることが示されています。このような離散型にすることによって表計算アプリ等で数値計算ができるようになります。昨年度の本校サイエンス創造科の課題研究ではこの手法でペットボトルの軌道を計算した班がありました。



　マルサスモデルがグラフではどのようになるかというと、高校 1 年生で習う 2 次関数として表せます。プログラミングのように
$rx_n(1 - x_n) \rightarrow y\,, y \rightarrow x_n$と次々置き換えてみます。今$r = 2\,, x_1 = 0.2$ とすると、x_n の値は矢印の y 座標のように推移し、この場合は 0.5 に近づいていきます。



ここで、$r = 3.8\,, x_1 = 0.2$でグラフを描くと次のようになります。矢印がぐるぐる回って x_n の値が不安定になります。表計算アプリで n の値を横軸、x_n の値を縦軸とした折れ線グラフを次に載せます。



0 と 1 の間を不規則に動いています。数式によって決定されるものの、出てきた数値に全く規則性はありません。このような現象を**カオス**と呼びます。

数値計算できれば困ることはないじゃないかとは思えますが、この数値の動きは、最初の数字が少し変わるだけで先の数値がかなり変わるので、どうなるかわからないということです。例えば天気予報では、現在の気圧等の数値データを測定して先の天気をシミュレーション、予測していくのですが、測定値の誤差で結果がかなり変わってきます。最近は予報の精度も上がってきたように思えますが、それでも週間天気予報なんてまだそんなに当てにはできません。北京で蝶が羽ばたくとニューヨークで嵐になると例えられます。

数学、科学が発展していくと何でもできるようなイメージをお持ちかもしれませんが、逆に数学的に無理、困難だということも見つかるようですね。

参考文献：京都大学大学院情報学研究科 数理工学専攻 矢ヶ崎 一幸 教授
力学系の数値シミュレーション　ロジスティック写像
http://yang.amp.i.kyoto-u.ac.jp/~yagasaki/python/lm/lm.html

過去の記事は
こちらから