たのしいサイエンス通信

2025 年度

7

交わらない２円の交点を通る直線

高校数学、図形と方程式の応用問題として次のような問題があります。

> ２円 $x^2+y^2-5=0\,,x^2+y^2-6x-2y+5=0$ の交点を通る直線の方程式を求めよ。（数研出版　新編数学Ⅱより）

これは、kに関する恒等式 $k(x^2+y^2-5)+(x^2+y^2-6x-2y+5)=0$ を満たすので、k をいろいろな値に変化させてできる図形は必ずこの２円の交点 $(1,2),(2,-1)$ を通ります。それで$k=-1$ とするとこの式は$-6x-2y+10=0$、整理すると $y=-3x+5$ という１次関数、すなわち直線の式が出てきます。

この方法は、～の交点を通りある点を通る円の方程式を求めよなどの定番的な解法となっており、特に２円の交点が整数で求まらないようなときには絶大な効果を発揮するのですが、あまりにも形式的なので次のようなときのことも考えたいと思います。

> ２円 $x^2+y^2-1=0\cdots①\,,x^2+y^2-6x-8y+16=0\cdots②$
> の交点を通る直線の方程式を求めよ。

はいはい。$-(x^2+y^2-1)+(x^2+y^2-6x-8y+16)=0$ より
直線 $6x+8y-17=0$ ですね？

いえいえ、実はこの２円は交わらないのです。ということで設問としては不備なのですが（だからそのような直線はないというのが正解）、形式的に解いて出てきた答，$6x+8y-17=0$ という直線にも何か意味があるのではないかと考えるのが自然な発想ではないでしょうか。

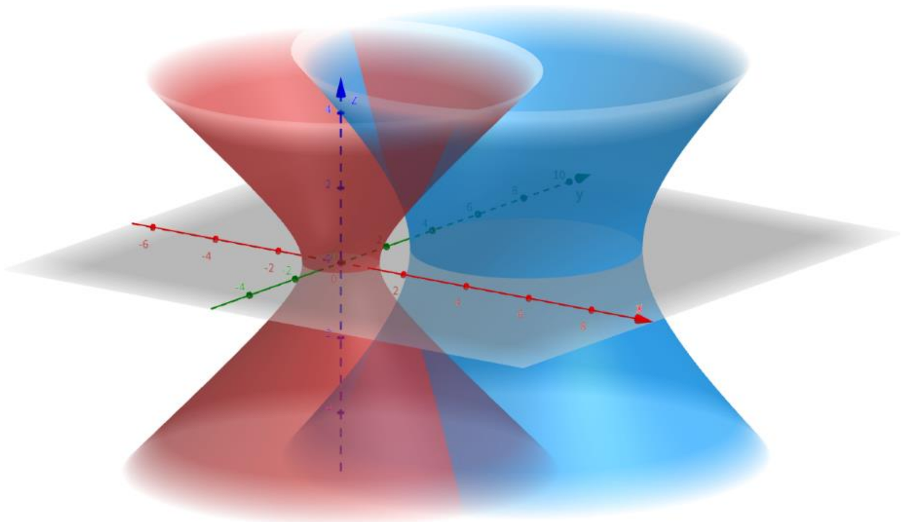
そこで今までの授業で学んできたことを思い出してほしいのです。２次方程式があってその解を求めるとき、解の公式の√の中が負の数になって「解なし」で終わらせず、２次方程式には必ず解があるのだ、実数の世界に無ければ他のと

ころ（虚数）にあるのだと考え、その先（３次方程式の解法など）に結びついていくのですね。こういうことからこの２つの円も、座標平面とは違うところで交わっているのではないかと考えます。

そこで、座標平面外のところを考えるために y を複素数 $y = u + vi$ と考え、y 軸の代わりに u 軸 v 軸として x-u-v の空間で考えてみます。そうすると①の式は

$$x^2 + (u + vi)^2 - 1 = 0$$
$$x^2 + u^2 - v^2 - 1 + 2iuv = 0$$

となり，実部を見ると　$x^2 + u^2 - v^2 - 1 = 0$ …①’となります。
同様に②の式の実部を見て　$x^2 + u^2 - v^2 - 6x + 8u + 16 = 0$ …②’となります。
これらを x-u-v の空間で図示すると下図になります（図では u,v が y,z になっています）。



①’②’の空間上のグラフはそれぞれ**双曲面**と呼ばれる図形となり，これは空間上で交わることになります。あとは平面上の問題と同様に解くと，①’から②’を引いて出てきた式 $6x + 8u - 17 = 0$ ，これがこの 2 つの曲面が交わる部分を含む面の方程式であり，$y = u + vi$ で $v = 0$ としたとき，$y = u$ となるので実数の x-y 平面上では直線 $6x + 8y - 17 = 0$ を表します。

このように虚数にまで視野を広げることで，形式上の計算で出てくる謎の直線の正体を暴くことができました。　　（逸）

参考：交わらない２円の交点を通る直線の存在
izumi-math.jp/F_Nakamura/suusemi/suusemi.htm

過去の記事は
こちらから