# たのしいサイエンス通信

2025 年度

8

## 根軸

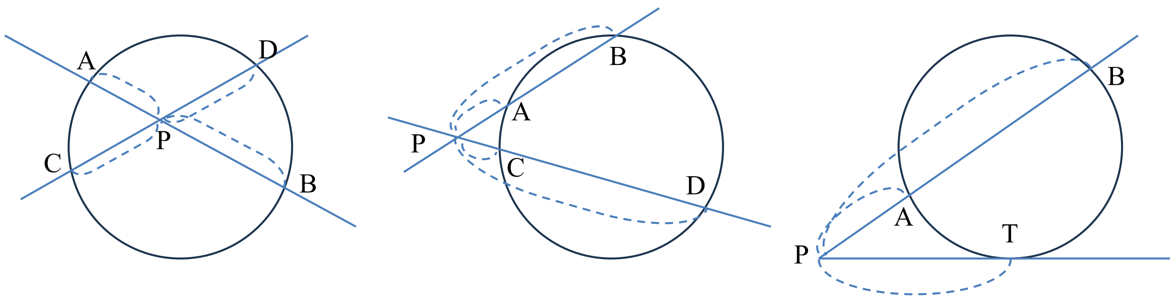
前号で，平面上では存在しない「２円の交点を通る直線」について書きましたが，これは平面上では実は他の意味も持ちます。

中心$O_1(x_1, y_1)$，半径$r_1$の円 $C_1$ と，中心$O_2(x_2, y_2)$，半径$r_2$の円 $C_2$ を考えます。

$$f(x,y) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - r_1^2 \,, g(x,y) = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - r_2^2$$

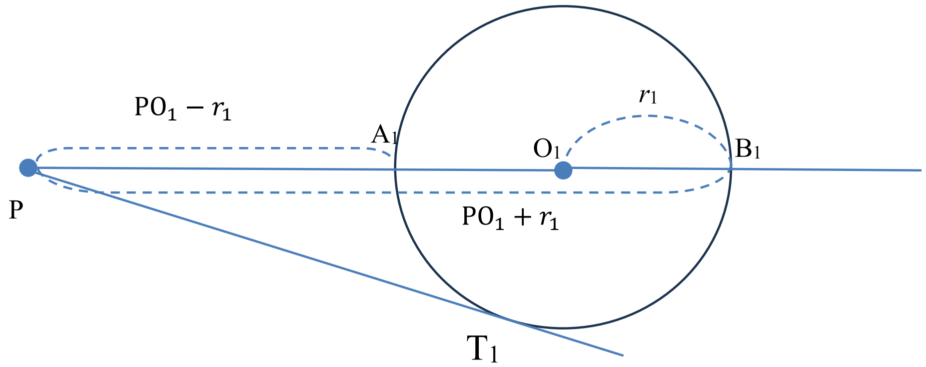
とすると，$C_1$，$C_2$ の方程式はそれぞれ$f(x,y) = 0\,, g(x,y) = 0$ で表され，この 2 円の差を取って作る$f(x,y) - g(x,y) = 0$ が２円が交わる交点を通る直線であり，交わらなくても直線の方程式ができます。この直線を $l$ とします。

ここで，高校数学 A で学ぶ「**方べきの定理**」というものがあります。これは，下の１つめ，２つめの図では$\mathrm{PA} \times \mathrm{PB} = \mathrm{PC} \times \mathrm{PD}$ が，３つめの図では$\mathrm{PA} \times \mathrm{PB} = \mathrm{PT}^2$（T は接点）が成り立つというものです。

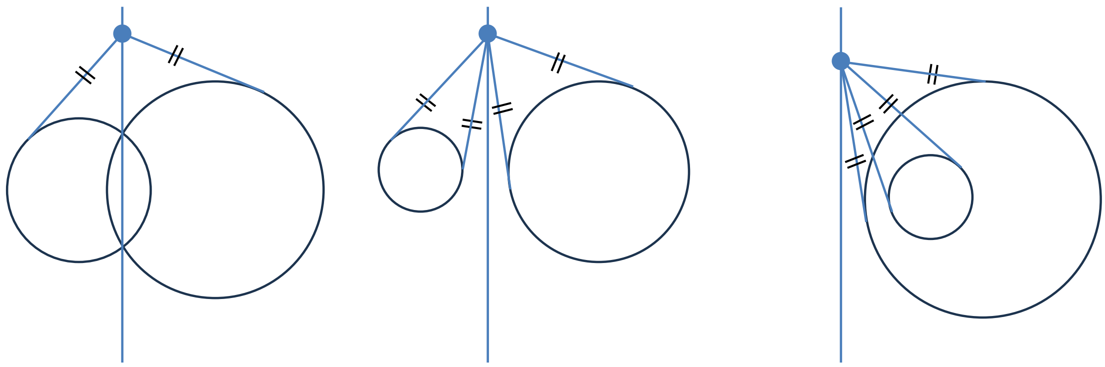



この$\mathrm{PA} \times \mathrm{PB}, \mathrm{PC} \times \mathrm{PD}, \mathrm{PT}^2$に「方べき」と名前を付けてあげると「方べきの値が一定である」という風に方べきの定理を言い換えられますね。

２つの円が離れているとしたとき，$l$ 上の点を P とします。そして直線 $\mathrm{PO_1}$ と円 $C_1$ との 2 つの交点をそれぞれ $A_1, B_1$ とすると，方べき $\mathrm{PA_1} \times \mathrm{PB_1}$ は $(\mathrm{PO_1} - r_1)(\mathrm{PO_1} + r_1) = \mathrm{PO_1^2} - r_1^2$ となります。そして $f(x,y) = \mathrm{PO_1^2} - r_1^2$ と表せます。同様に $g(x,y) = \mathrm{PO_2^2} - r_2^2$ と表せます。また，点 P は直線 $f(x,y) = g(x,y)$ 上の点なので，$\mathrm{PO_1^2} - r_1^2 = \mathrm{PO_2^2} - r_2^2$，となり，点 P から円 $C_1, C_2$ に伸ばした直線の方べきが等しくなるということがわかりました。方べきの定理を使って言い換えると，（点 P が 2 つの円の外側にあるとき）$l$ 上の点から 2 つの円の接線を引いたときに，接点までの距離が等しくなるということがわかります。




教科書では２円が交わっているときに，そのような性質があるというものがありましたが，それの拡張になります。このような線を 2 つの円の**根軸**と言います。（逸）



参考：交わらない２円の交点を通る直線の存在
[izumi-math.jp/F_Nakamura/suusemi/suusemi.htm](izumi-math.jp/F_Nakamura/suusemi/suusemi.htm)

過去の記事は
こちらから