たのしいサイエンス通信

2025年度

1

京都大学 2025

昨年度「2025 という数の性質」で、45^2 や $1^3+2^3+\ldots+9^3$ などといったものを挙げました。2025 を使った問題や 2025 が答えとなる問題をどこかがやるのではと思って考えたのですが、京都大学が面白い問題を出してきましたので紹介したいと思います。

京都大学　前期　理系　問題２

> 正の整数 x , y , z を用いて
> $$N = 9z^2 = x^6 + y^4$$
> と表される正の整数 N の最小値を求めよ。

とてもシンプルな問題。美しいですね。やみくもに代入して考えても数字が大きくてなかなか計算できそうにありません。何らかの数の性質を用いて考える数を限定していかなければいけません。

解法はこの手の問題で定番の「3 で割った余り」で絞っていくタイプ。定番だけに高校数学をしっかり学んだ受験生ならしっかり練習したでしょうから、割と難なく（？）解けたのではないかと思います。

x が 3 の倍数でないなら余りが１か「－１」（整数 a を用いて$x = 3a \pm 1$と表せる）なので x^6 を 3 で割った余りは１となります。同様に y が 3 の倍数でないなら余りが１か「－１」なので y^4 を 3 で割った余りは１となります。$x^6 + y^4$が 3 の倍数とならなければいけないで、x も y も 3 の倍数でないといけないことがわかります。

ここで正の整数 a,b を用いて $x=3a, y=3b$ と置くと、

$$9z^2=(3a)^6+(3b)^4=3^6a^6+3^4b^4$$
$$z^2=3^4a^6+3^2b^4$$

先ほどと同様の議論で z も 3 の倍数と分かり、これを正の整数 c を用いて $z=3c$ と置くと、

$$(3c)^2=3^4a^6+3^2b^4$$
$$3^2c^2=3^4a^6+3^2b^4$$
$$c^2=9a^6+b^4$$

最小値を求めるのだからこのあたりでしらみつぶしで当たってみましょうか。$a=1$ としたとき、$c^2=9+b^4$ 。これは $b=2$ のとき $c^2=9+16=25$ というおなじみの数式が出てきましたね。ちなみに $a=2$ とすると $c^2=9\times64+b^4>25$ なので、もうこの先は考えなくていいですね。
これで $a=1, b=2$ のときに c は最小値 5 となります。

すなわち $x=3, y=6$ のとき z の最小値は 15、これより

$$N=9\times15^2=3^6+6^4=2025$$

と求まります。

しかしよくこんな問題を思いついたなと感心しました。どうすればこのような問題を作ることができるのだろう。今の私では到底思いつきません。もっと勉強しないといけないですね。

この解答を見て改めて以前の式から作ってみると、

$$2025=1^3+2^3+3^3+\cdots+8^3+9^3=(1^3+2^3+\cdots+8^3)+9^3$$
$$=\left\{\frac{8(8+1)}{2}\right\}^2+9^3=36^2+9^3=(6^2)^2+(3^2)^3=6^4+3^6$$

…何とか導けた。　　　（逸）

過去の記事は
こちらから